

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 8

Serie nona

1 Agosto 1951

Alcune particolarità sul comportamento degli ultrasuoni nei liquidi.

F. PORRECA

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 20 Aprile 1951)

Riassunto. — In questo lavoro si mette in evidenza la distribuzione non uniforme di temperatura che si genera nelle onde ultracustiche stazionarie nei liquidi.

L'energia prodotta dall'onda che si propaga in un mezzo fluido: ed in particolare in un liquido genera per effetto dell'attrito interno un aumento di temperatura nel liquido. Se il sistema delle onde è un sistema stazionario, evidentemente il moto si effettua nelle zone ventrali, e ne consegue che è da prevedere il massimo aumento periodico di temperatura appunto nei ventri delle onde stazionarie. Naturalmente questa variazione termica tende ad annullarsi per il fenomeno di conduzione e di diffusione del liquido. Però, a seconda della rapidità del processo di conducibilità termica o di diffusione, v'è la possibilità che tale aumento di temperatura dia origine a qualche manifestazione ottica che possa controllarsi. Un aumento di temperatura produce infatti una variazione di densità del liquido e quindi d'indice di rifrazione e se l'aumento di temperatura non è uguale in tutta la massa del liquido, com'è appunto nel caso che si considera, si creano variazioni dell'indice di rifrazione, che sono evidentemente massime nelle zone ventrali del moto, variazioni che possono mettersi in evidenza con opportuni dispositivi.

Questa distribuzione diversa dell'indice per effetto termico, che è localizzata più o meno nelle zone ventrali, evidentemente con carattere piuttosto irregolare, può sempre immaginarsi come la sovrapposizione di tante onde di densità con λ grande (piccole variazioni), che alterano l'andamento puramente

sinusoidale dell'onda ultrasonora. Sviluppando allora in serie di Fourier la funzione che esprime l'effettivo andamento dell'indice di rifrazione lungo la direzione della propagazione degli ultrasuoni, si deve riscontrare la presenza di altri reticoli, oltre il reticolo fondamentale, e questi reticoli daranno origine a spettri satelliti. Supponendo, nel caso generale, che vi sia una distribuzione continua di reticoli satelliti (il che in altre parole significa la presenza di una serie piuttosto fitta di periodicità nello sviluppo in serie di Fourier) ne segue che, per sostanze nelle quali si verifica più accentuatamente questo andamento caratteristico dell'indice di rifrazione, deve comparire un allargamento delle righe per la presenza di questo continuo.

D'altra parte è provato, in accordo con le previsioni teoriche che, se mediante l'eccitazione di due frequenze distinte e notevolmente diverse (ν e 7ν per esempio) si ha in un mezzo la propagazione contemporanea di due onde ultrasonore, i reticoli di diffrazione si sovrappongono additivamente ⁽¹⁾ (caso che avviene anche coi reticoli di ampiezza).



Fig. 1.

Per mettere in evidenza l'anomalia ottica prevista, è opportuno ricordare che in spettroscopia un aumento di larghezza della fenditura luminosa del collimatore produce un'azione diversa su di una riga

monocromatica o su di uno spettro continuo. Infatti nel primo caso si ha rispettivamente un andamento dell'intensità riportato in fig. 1 e nel secondo caso quello riportato in fig. 2. Quindi aumentando la larghezza della fenditura luminosa si possono porre in evidenza righe di debolissima intensità e di frequenza molto vicina ad una riga di intensità più intensa, cioè l'allargamento delle righe del reticolo.

Nelle ricerche che si descrivono è stata usata come sorgente di onde ultrasonore un quarzo piezoelettrico eccitato da un circuito tipo Hartley sulla frequenza $\nu = 1,740$ MHz. Il quarzo era fissato sul fondo di una vaschetta contenente il liquido in esame e l'osservazione si faceva in onde stazionarie, ottenute come di consueto con l'uso di una lamina piana opportunamente spostabile e riflettente. Come sorgente luminosa si è adoperata una fenditura opportunamente allargata (larghezza dell'ordine 0,5 mm) illuminata da una lampada al sodio. Le lastre fotografiche di così ottenute sono state microfotometrate al microfoto metro Moll.

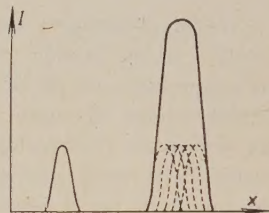


Fig. 2.

In primo luogo si è usato come liquido di riferimento l'acqua (microfotometria a) fig. 3). Si è poi passato all'esame di una soluzione di zucchero cara-

(1) L. BERGMANN: *Der Ultraschall* (1949), p. 175.

mellato in acqua, sostanza dotata di notevole viscosità ($\eta = 0,040$) (microfotometria *b*), fig. 3). Come, vedesi si ha rispetto all'acqua una notevole differenza dell'aspetto delle frange.

Passando poi all'olio di vasellina ($\eta = 0,605$), non si riscontra un allargamento notevole delle righe dello spettro di diffrazione (microfotometria *c*), fig. 3).

Particolare interesse ha presentato una soluzione di gelatina commestibile in acqua di concentrazione ponderale pari all'80 ‰. Tale soluzione per

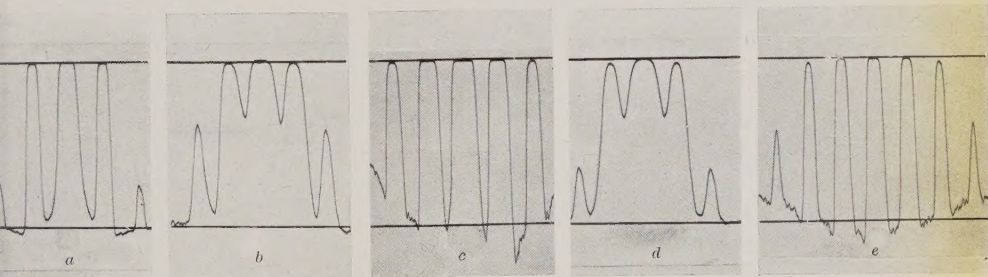


Fig. 3.

$t = 20^\circ\text{C}$ ha un coefficiente di viscosità $\eta = 0,025$; a temperatura di circa 15°C si rapprende (cioè non può essere più versata dal recipiente che la contiene) comportandosi quasi come un solido. Le microfotometrie *d*) ed *e*) della fig. 3 si riferiscono alla gelatina liquida e solida, sempre con la stessa posa di 5". Da queste microfotometrie si ricava che molto diverso è il loro comportamento; bisogna ancora aggiungere che nella gelatina liquida l'allargamento per la riga di ordine zero si conserva per breve tempo anche dopo cessata l'eccitazione ultrasonora.

Tale effetto di allargamento deve attribuirsi ad effetto termico: evidentemente se tutta la massa liquida aumentasse di temperatura uniformemente non dovrebbe esserci alcuna manifestazione del tipo osservato, che invece dipende dalla particolarità del riscaldamento.

Questo effetto richiede un certo tempo per manifestarsi e permane, come si è detto, dopo la cessazione dell'emissione degli ultrasuoni per breve tempo. La prova della presenza di questo effetto termico, dotato di inerzia, si è avuta nel seguente modo: si è fotografato la riga di ordine zero prima dell'eccitazione delle onde ultrasonore, che venivano emesse per la durata di 60"; si è fotografato nuovamente la riga centrale, collegando opportunamente l'otturatore dell'obbiettivo all'interruttore del circuito oscillante, in modo che l'intervallo di tempo compreso fra la fine dell'eccitazione degli ultrasuoni e l'inizio della posa fotografica fosse praticamente nullo.

I risultati sono riportati in fig. 4 dove le ordinate sono le intensità ricavate

dalle rispettive microfotometrie. Come vedesi, gli ultrasuoni generano un'alterazione che può intepretarsi come la presenza di una serie di reticoli ultrasuonori di bassa frequenza, dovuta appunto ad una modificazione nel mezzo

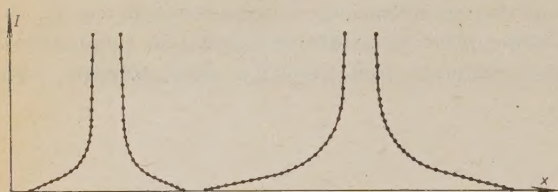


Fig. 4.

prodotta dalla propagazione delle onde ultrasuonore e che per mane per un certo tempo.

La riprova che l'ineguale riscaldamento della massa del liquido in onde stazionarie è la causa prima dell'ef-

fetto notato si è chiaramente avuta facendo una fotografia della solita posa di 5'', ma illuminando 5 volte per la durata di un secondo ad intervalli di 10'' per volta, e eccitando gli ultrasuoni solo durante il tempo di illuminazione. In queste condizioni non si notò alcun allargamento della riga.

Per dimostrare ancora che questo allargamento è dipendente dalla inomogeneità del riscaldamento della massa liquida si è fatta la seguente esperienza: si è prodotto una dissipazione di energia meccanica mediante il mulinello di

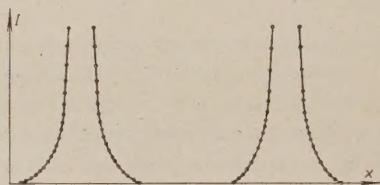


Fig. 5.

Joule in movimento nella vaschetta contenente uno dei liquidi esaminati in modo che vi fosse una dissipazione di energia ben superiore a quella connessa con la propagazione delle onde ultrasuonore ⁽²⁾. La fig. 5 dà l'andamento dell'intensità in questo caso prima e subito dopo l'azione del mulinello e da essa risulta chiaramente che non vi è alterazione dipendente da un aumento uniforme della temperatura del mezzo in esame.

Questa indagine è stata estesa anche a sostanze con molecole molto grandi e chimicamente meglio definite di quelle già usate e precisamente si è impiegato il «dispergal 0» ($\eta = 0,030$) ed una soluzione in acqua di etilpoliglicolo della concentrazione volumetrica dell'800‰ e $\eta = 0,075$.

Anche queste sostanze, le cui molecole piuttosto complesse sono del tipo $\text{OH}-(\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O})_n-\text{OH}$, presentano un effetto analogo e cioè righe diffatte non nette e allargamento dell'immagine della riga d'ordine zero che

⁽²⁾ L'aumento di temperatura era di oltre 1 °C superiore ai pochi decimi riscontrati durante l'emissione ultrasuonora.

permane anche dopo che è cessata l'azione degli ultrasuoni, scomparendo in un tempo più o meno rapido.

Si è poi voluto studiare più specificamente l'andamento termico del liquido prima, durante e dopo l'azione degli ultrasuoni, e ciò mediante la misura della temperatura per mezzo di una pinza termoelettrica (una divisione di sposta-

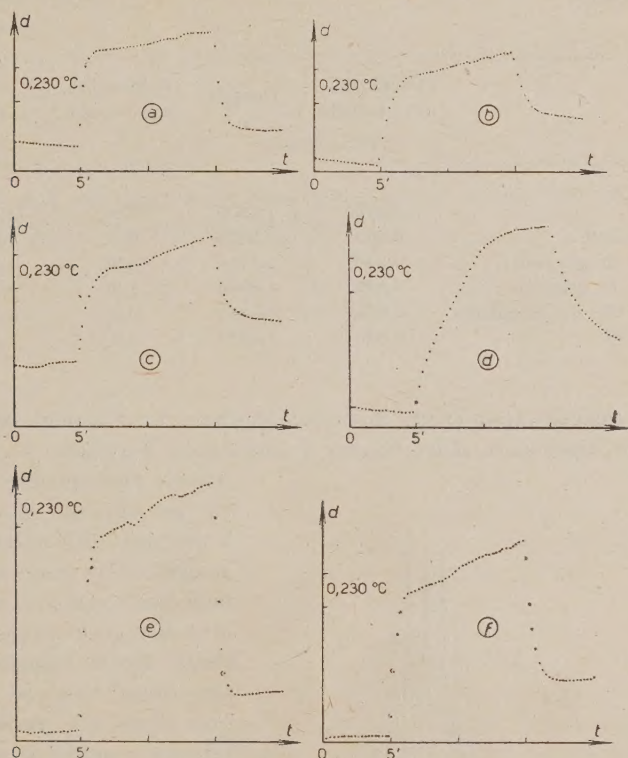


Fig. 6. — a) Acqua; b) Soluzione di gelatina; c) Soluzione di glucosio; d) Olio di vaselina; e) Dispergal 0; f) Soluzioni di Etilpoliglicolo.

mento = $2,3 \cdot 10^{-3}$ gradi C). Le curve riportate in fig. 6 danno l'andamento della temperatura in funzione del tempo per le varie sostanze. Da esse si osserva che dopo un'ascesa piuttosto rapida si ha un aumento più lento della temperatura e ciò evidentemente sta a significare che l'energia termica prodotta per effetto dell'assorbimento dagli ultrasuoni dapprima aumenta rapidamente la temperatura del liquido e poi per effetto dei processi di conduzione e d'irraggiamento ristabilisce una temperatura di regime. Dalla conoscenza del calore specifico, della massa del liquido e della temperatura in fun-

zione del tempo è possibile determinare la quantità di calore che nelle nostre condizioni è sviluppata in ogni liquido per effetto del passaggio del fascio.

Poichè l'effetto di allargamento delle righe è tanto più vistoso quanto maggiore è il dn/dT si è proceduto ad una determinazione di questo parametro, che non è risultato molto diverso per i vari liquidi adoperati. La tabellina dà i valori ottenuti.

	Coefficiente di viscosità μ	Densità η	Calore spec. a press. cost. c_p	dn/dT
Acqua	0,0099	1,0000	1,00	$3,0 \cdot 10^{-4}$
Olio di vaselina	0,605	0,8851	0,55	$4,0 \cdot 10^{-4}$
Soluzione di glucosio	0,040	1,1180	0,89	$4,5 \cdot 10^{-4}$
Soluzione di gelatina	0,025	1,0065	1,00	$4,3 \cdot 10^{-4}$
Soluzione di Etilpoliglicolo	0,075	1,0541	0,76	$3,7 \cdot 10^{-4}$
Dispergal 0	0,030	1,0178	0,98	$2,5 \cdot 10^{-4}$

Evidentemente questo effetto dovuto all'ineguale riscaldamento della massa liquida è in dipendenza della diversa velocità delle particelle, e quindi del

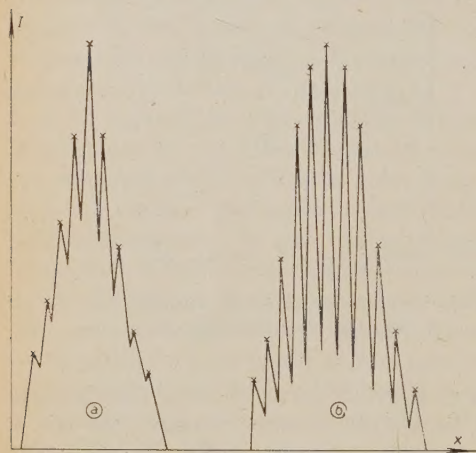


Fig. 7. — a) Soluzione di zucchero caramellato;
b) Acqua.

diverso dissipamento d'energia che per viscosità si viene così a produrre. Tale effetto d'allargamento deve essere quindi più imponente quando si adoperano ultrasuoni a cui competono lunghezze d'onda maggiori perchè più estesa viene ad essere la zona dove v'è variazione di velocità e quindi la zona dove per variazione termica si produce la variazione d'indice di rifrazione. Ed infatti, passando da $\nu = 1,740$ a $\nu = 0,585$ MHz, e cioè da un λ (acqua) dell'ordine di grandezza di 0,8 mm ad un λ di 2,4 mm, si nota, e ciò anche con fenditura stretta, un cospicuo allargamento, che

è tanto più grande quanto maggiore è η dato che l'aumento di viscosità impedisce un rapido livellamento della temperatura. In fig. 7 si presentano

l'andamento delle intensità delle righe diffratte in acqua e nella soluzione di zucchero caramellato in acqua, ottenuta con ultrasuoni di frequenza $\nu = 0,585$ MHz.

Si ringrazia vivamente il prof. A. CARRELLI per i chiari consigli ed i mezzi messi a disposizione.

SUMMARY

In this work the unlike distribution of temperature is discussed, which arises in liquids subjected to standing ultrasonic waves.

Metodo di discriminazione di stelle a 2 rami in emulsioni nucleari.

M. MERLIN e O. PIERUCCI

Centro di Studio degli ioni veloci del C.N.R., Istituto di Fisica dell'Università - Padova

(ricevuto il 1° Maggio 1950)

Riassunto. — Si propone un metodo per la discriminazione delle stelle a due rami dagli altri eventi apparentemente simili. Ci si basa sul fatto che, per energie non troppo basse, eventi con angoli di almeno 120° si possono considerare praticamente tutti come stelle; dal numero di queste, assumendo una distribuzione isotropa per i rami evaporativi, si può estrapolare il numero totale di stelle a due rami. Si verifica che i rimanenti eventi a due rami, in massima parte dovuti a scattering singolo coulombiano, soddisfano alla legge di Rutherford.

I dati relativi alle stelle di evaporazione nucleare nelle emulsioni fotografiche che si trovano nella letteratura riguardano di solito stelle con almeno tre rami. Pochi autori soltanto ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾ hanno riportato nelle loro statistiche qualche dato su stelle a due rami: ma essi hanno omesso allora di specificare il criterio adottato per la discriminazione delle stelle vere e proprie a due rami evaporativi, da quegli eventi che nell'osservazione possono venire scambiati con esse, e che qui elenchiamo: *a)* scattering per interazione coulombiana singola, *b)* scattering per interazione nucleare, *c)* stripping di un deutone.

La conoscenza della percentuale effettiva delle stelle a due rami costituirebbe un dato di un certo interesse, come indicatrice dell'andamento dell'intensità della componente nucleonica sulle basse energie, se si ammette che vi

⁽¹⁾ E. O. SALANT, J. HORNBORSTEL, C. B. FISK e J. E. SMITH: *Phys. Rev.*, **79**, 184 (1950).

⁽²⁾ J. B. HARDING: *Phyl. Mag.*, **40**, 530 (1949).

⁽³⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **79**, 952 (1950).

sia una relazione tra l'energia del primario e il numero medio di rami evaporati in una stella da esso generata. Per questa ragione ci siamo proposti la determinazione di tale percentuale di stelle a due rami.

Occorre però tenere presente che, ove non sia possibile (specie con lastre orizzontali) individuare la traccia eventuale del primario, verranno classificati come stelle a due rami indifferentemente eventi nei quali un protone primario ha dato origine ad un protone secondario, ed eventi nei quali un neutrone ha

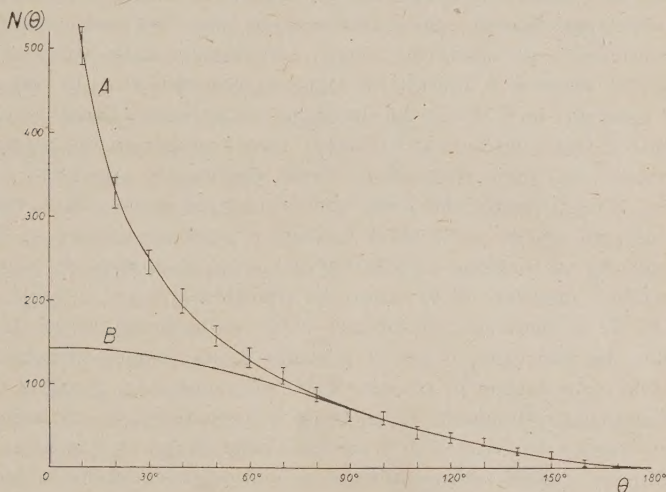


Fig. 1.

dato origine a due protoni secondari. Tale causa d'incertezza è comune anche alle statistiche relative alle stelle con un numero maggiore di rami. Noi riteniamo tuttavia che l'inconveniente non sia molto grave, in quanto le stelle a pochi rami sono in massima parte generate da neutroni, mentre per le stelle a molti rami l'incertezza di un ramo sul numero totale non ha molta importanza.

Partiamo ora dalle considerazioni seguenti:

1) I deutoni costituiscono circa il 10% dei protoni; poichè la sezione d'urto per lo stripping ^(*) (processo *c*) non è certo superiore a quella del processo *a*), il processo *c*) può venire trascurato in una prima approssimazione.

2) La sezione d'urto per lo scattering coulombiano (processo *a*) è una funzione rapidamente decrescente sia dell'energia che dell'angolo di scattering (legge di Rutherford).

^(*) H. E. GOVE: *Phys. Rev.*, **81**, 364 (1951).

3) La sezione d'urto relativa al processo *b*), in base ai dati sperimentali disponibili ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ sembra, da un lato, dipendere assai poco dall'energia, e d'altro lato dipendere dall'angolo press'a poco con la stessa legge decrescente dello scattering coulombiano. La sezione d'urto di scattering coulombiano diviene confrontabile con quella del processo *b*) per i diversi angoli soltanto ad una energia piuttosto elevata, che dai dati attuali ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ abbiamo valutata a circa 500 MeV. Ora, le energie dei rami evaporativi delle stelle sono in genere assai inferiori a tale valore; ne segue che gli eventi *b*) saranno pochi rispetto a quelli *a*) nel campo d'energia che ci interessa; in prima approssimazione basterà quindi discriminare gli scattering singoli coulombiani dalle vere stelle.

Per questo scopo si è adottato il seguente procedimento: di 504 eventi a due rami osservati in 0,51 cm³ di emulsione su lastre G5 Ilford esposte orizzontalmente è stato determinato l'angolo vero θ compreso tra un ramo e il prolungamento dell'altro, deducendo questo dall'angolo apparente nel piano della lastra e dagli angoli che i due rami fanno col piano stesso. Sono stati scartati tutti gli eventi per i quali l'angolo θ risultava minore di 10°. Si è quindi costruita in funzione di θ la curva che dà il numero di eventi per i quali l'angolo è maggiore di θ , curva che riportiamo in fig. 1 (curva A). Sui 504 eventi, 67 si potevano considerare come stelle sicure, o per la diversa ionizzazione dei due rami, o per la presenza di un rametto inferiore ai 5 μ identificabile come nucleo di rinculo. Tutti gli eventi con angolo θ maggiore di 120° fanno parte di questi 67. Siccome la probabilità di scattering è funzione rapidamente decrescente di θ mentre i rami evaporativi delle stelle sono presumibilmente emessi isotropicamente, si può del resto ritenere, anche indipendentemente dalla precedente indicazione, che tutti gli eventi con $\theta > 120^\circ$ siano stelle. Dall'ipotesi dell'isotropia dei rami evaporativi si può quindi calcolare con la formula

$$P(\theta) = \frac{k}{2} (1 + \cos \theta),$$

il numero di stelle $P(\theta)$ i cui due rami formano un angolo maggiore di θ e normalizzare la costante k sul valore sperimentale di

$$P(120^\circ) = 36 \pm 6.$$

In tale modo si è ricavata la curva *B* pure riportata in fig. 1. Il numero totale di stelle a due rami così ottenuto è

$$P(0^\circ) = 144 \pm 24.$$

⁽⁵⁾ A. BRATENAH, S. FERNBACH, R. H. HILDEHAND, C. E. LEITH e J. MOJER: *Phys. Rev.*, **77**, 597 (1950).

⁽⁶⁾ J. DEJUREN e N. KNABLE: *Phys. Rev.*, **77**, 606 (1950).

I valori $R(\theta)$ delle differenze $N(\theta) - P(\theta)$ sono riportati in fig. 2, e accanto ad essi è tracciata la curva teorica C dedotta dalla formula di Rutherford per integrazione sugli angoli da 10° a 180° . Come si vede, a parte gli angoli piccoli ($< 30^\circ$) per i quali vi sono scarti più notevoli, giustificati dalla maggiore probabilità di perdere eventi nell'osservazione, l'accordo risulta assai soddisfacente.

Si può tentare di ricavare il c.l.m. di scattering dai dati sperimentali misurando lo sviluppo totale di tracce osservate in una data area e dividendolo per il numero di eventi corrispondenti. Abbiamo creduto opportuno di prendere in considerazione soltanto

eventi con rami di almeno 500μ e con ionizzazione specifica superiore a tre volte il minimo, il che per i protoni corrisponde ad un intervallo energetico tra i 10 e i 100 MeV. Il numero di eventi soddisfacenti a tale requisito è risultato di 219, di cui 64 stelle sicure. Il numero di stelle sicure essendo rimasto pressoché invariato rispetto alla determinazione complessiva precedente, appare lecito presumere che anche il numero totale di stelle estra-

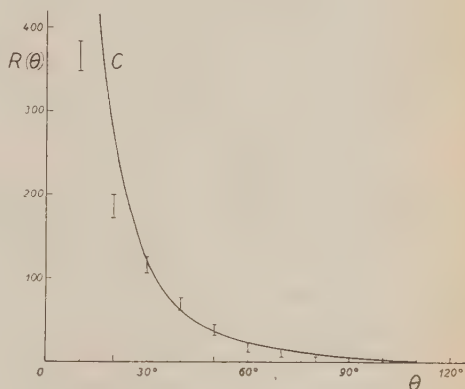


Fig. 2.

polato sia rimasto pressoché il medesimo: lo abbiamo fissato in $14464/67 = 138$. Con le limitazioni angolari ed energetiche sopradette il numero di scattering in 0.51 cm^3 d'emulsione risulta quindi $219 - 138 = 81$: il che, tenuto conto della lunghezza complessiva di tracce considerate (23 m per cm^3) conduce per il cammino libero medio di scattering al valore:

$$\lambda_{\text{scatt}} = 14,4 \pm 2,5 \text{ cm},$$

e per la sezione d'urto relativa

$$\sigma_{\text{scatt}} = 1,47 \pm 0,3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Tale valore è probabilmente in eccesso, in quanto in esso è compresa una piccola parte di eventi *b)* trascurata in prima approssimazione.

Per il valore teorico della sezione d'urto media tra 10 e 100 MeV, ammettendo che tutti gli scattering in questione siano relativi a protoni e assumendo per questi, in mancanza di precise indicazioni, uno spettro di energia costante, si ricava:

$$\sigma_{\text{teor}} = 1,13 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

che, date le incertezze delle precedenti ammissioni, si può considerare in buon accordo col valore osservato.

I valori relativi del numero di stelle in funzione del numero di rami osservati sono riportati nella tabella I.

TABELLA I.

Stelle a	2 rami	144
"	3 "	67
"	4 "	36
"	5 "	30
"	6 "	18
"	7 "	13
"	8 "	7
"	9 "	6
"	≥ 10 "	15

Il numero di stelle a 2 rami è dunque molto maggiore di quello delle stelle a 3 rami, se sono fondate le nostre considerazioni. Per trarre delle conclusioni da tale indicazione occorrerebbe ovviamente disporre di una statistica più abbondante. Osserviamo comunque che i nostri dati non sono direttamente paragonabili con quelli ottenuti coi ciclotroni: i dati di BERNARDINI e coll. ⁽⁷⁾ si riferiscono a stelle generate da protoni primari con energia compresa tra 350 e 400 MeV; i dati di GARDNER e PETERSON ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾ sono ottenuti coi primari meno energetici ma su emulsioni molto meno sensibili, nelle quali come osservano HORNING e BAUMHOFF ⁽¹⁰⁾, si perdono presumibilmente molte stelle a due rami. Un risultato paragonabile col nostro è quello citato da questi autori ⁽¹⁰⁾, che fornisce la statistica di stelle generate da neutroni di 90 MeV in camera di Wilson. Le stelle a due rami sono pure qui in netto eccesso rispetto alle altre.

Noi riteniamo che i risultati ora presentati abbiano più che altro un valore illustrativo del metodo proposto per identificare le stelle a due rami, e non siano da considerare ancora come definitivi dal punto di vista quantitativo, data la ristrettezza della statistica su cui si basano.

Per rendere più rapida l'estensione della statistica ad un numero elevato di eventi occorrerebbe poter evitare la misura dell'angolo vero, che è alquanto gravosa e basarsi direttamente sulla misura dell'angolo apparente nel piano della lastra. Questa possibilità si trova attualmente allo studio.

⁽⁷⁾ G. BERNARDINI, E. T. BOOTH e S. J. LINDENBAUM: *Phys. Rev.*, **80**, 905 (1950).

⁽⁸⁾ E. GARDNER e V. PETERSON: *Phys. Rev.*, **75**, 364 (1949).

⁽⁹⁾ E. GARDNER, *Phys. Rev.*, **75**, 379 (1949).

⁽¹⁰⁾ W. HORNING e L. BAUMHOFF: *Phys. Rev.*, **75**, 370 (1949).

Ringraziamo il prof. G. PUPPI per averci consigliato il lavoro ed i proff. A. ROSTAGNI e N. DALLAPORTA per le utili discussioni sull'argomento.

SUMMARY

A method is proposed, which allows to make a distinction between two prongs stars and apparently similar events. The method is based on the fact that, apart the case of very low energies, all two prongs events with a scattering angle of at least 120° can be practically considered as stars. By assuming isotropic distribution for evaporation prongs, the total number of two prongs stars can be obtained by extrapolation. It has been verified that the other two prongs events, mainly due to a single Coulomb scattering, satisfy the Rutherford formula.

On the Universal Fermi-type Interaction (I).

E. R. CAIANIELLO

University of Rochester - Rochester, N.Y., U.S.A.

(ricevuto il 10 Maggio 1951)

Summary. — The question of the possibility of a universal Fermi-type interaction is re-examined. It is found that the answer may be positive, provided one accepts the possibility of two-neutrino annihilations of particle-antiparticle pairs; the cross sections for these last processes turn out however to be exceedingly small. These considerations are exemplified with a particular Hamiltonian for the purpose of estimating at least qualitatively the prediction of such a theory: no claim is made as to the correctness of this choice.

Introduction.

Several Authors ⁽¹⁾ ⁽²⁾ have recently considered the question whether it is possible to obtain a general interaction of the Fermi type that would account for the known processes involving Dirac fermions:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} N \rightarrow P + e + \nu \\ \mu \rightarrow e + 2\nu \\ \mu^- + \langle P \rangle \rightarrow \langle \bar{N} \rangle + \nu \end{array} \right.$$

(the quotes denote nucleons bound in a nucleus), while forbidding at the same time any other process not observed in nature, such as (the bar denoting the antiparticle):

$$N + N \rightarrow \bar{N} + \bar{N}.$$

In doing this, electrons, μ -mesons, protons, neutrons and neutrinos are regarded as spin 1/2 Dirac particles and the value of the coupling constant

⁽¹⁾ C. N. YANG and J. TIOMNO: *Phys. Rev.*, **79**, 495 (1950).

⁽²⁾ A. GAMBA: *Nuovo Cimento*, **7**, 919 (1950).

is assumed to be the same for all processes, in excellent agreement with experiment. The unwanted processes that are not forbidden by charge conservation should result incompatible with the usual requirements of relativistic invariance of the interaction Hamiltonian density, by a suitable determination of the variance of the spinors representing the five fermions under space and time inversions.

The aim of the present contribution is to prove that the question admits of a positive answer, if the interaction Hamiltonian is conveniently defined. This is obtained by a formal modification of the one defined by WIGNER and CRITCHFIELD ⁽³⁾ and leads to the same numerical results in all the cases here considered. If experiment should disprove any of the formulae here obtained, this fact would therefore by itself invalidate also any study based on the Wigner-Critchfield interaction. It is in any case reasonable to expect that the study of a particular successful type of interaction, even if not physically correct, should exhibit some of the characteristic features of the «true» Hamiltonian (which should probably derive from better arguments than a simple guess). Furthermore, the main result of this study, i.e. the prediction that besides processes (I) also (and only) the following remain allowed:

$$(II) \quad \begin{array}{l} N + \bar{N} \\ P + \bar{P} \\ \mu + \bar{\mu} \\ e + \bar{e} \\ \nu + \bar{\nu} \end{array} \rightarrow \nu + \bar{\nu},$$

is at a large extent independent from the particular Hamiltonian considered, as will be seen from the type of arguments used for its derivation.

Section III reports the predictions of this theory for the spectra of the decays $N \rightarrow P + e + \nu$ and $\mu \rightarrow e + 2\nu$. The process $\mu^- + \text{«}P\text{»} \rightarrow \text{«}N\text{»} + \nu$ would be even easier to calculate, but hardly any information could be expected from it, since the uncertainties due to our lack of knowledge of nuclear dynamics would mask the features of interest. The cross sections for processes (II) are also reported; they turn out to be completely negligible if compared with the ones for two-photon annihilation. These processes appear however as *new possible modes of decay*, and as such their consideration might be in future of theoretical interest in studying the nature of the elementary particles involved. The processes inverse to (I) and (II) are also theoretically possible; it will be noted that some of the processes inverse to (II) would appear as the creation of charged massive particles as a result of the interaction of two neutrinos of very high energy, interaction that in such a theory would be

(³) C. L. CRITCHFIELD: *Phys. Rev.*, **63**, 416 (1943).

as fundamental a fact as the β -decay of the neutron or of the μ -meson. The present state of things however does not justify as yet any attempt to push these considerations as far as they would naturally lead: the point of mentioning them at all lies in the opportunity of offering as ample a ground for criticism as possible.

1. — The Universal Interaction.

1.1. — Transformation properties of spinors.

We choose to represent, as in ref. (1), the antiparticles by means of charge conjugate spinors. With Pauli's representation of the Dirac matrixes, denoting with K the operator of complex conjugation, the charge-conjugate spinor $\tilde{\psi}$ is connected to the spinor ψ by the relation: $\tilde{\psi} = \varrho_c \gamma_3 K \psi$, where ϱ_c (and likewise ϱ_S and ϱ_T to be defined later) is any of the 4th roots of the unit. (This fact, which distinguishes spinors from ordinary tensors, is a well known consequence of the double-valuedness of the spin representations of the rotation group). For our purposes it will suffice to fix $\varrho_c = +1$.

The space inversion is represented by the operator $I_S = \varrho_S \gamma_4$, and we say that ψ is of type A_S, B_S, C_S, D_S (similarly to ref. (1)) if ϱ_S is assumed to be respectively 1, $-1, i, -i$. The types of the charge-conjugates of the spinors of each type are then exhibited by the table:

TABLE I.

ψ	A_S	B_S	C_S	D_S
$\tilde{\psi}$	B_S	A_S	C_S	D_S

The time inversion operator I_T is conveniently defined by prescribing that the trajectory of a fermion must result inverted by its application, while the sign of the charge is not altered. One obtains, as well known, by setting $I_T = \varrho_T UK$, and imposing: $\psi(-t) = I_T \psi(t)$, $I_T^2 = \pm 1$:

$$I_T H \psi(+t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(-t) = U \bar{H} U^{-1} \psi(-t),$$

which gives $I_T = \varrho_T \gamma_1 \gamma_3 K$. (Pauli's operator $\varrho_T \gamma_5 \gamma_4$ is of a rather different nature: it would not leave $\bar{\psi}^* \gamma_4 \psi$ invariant. The bar denotes complex conjugate, the asterisk transposed). We have then the types, again with

$$Q_T = 1, -1, i, -i:$$

TABLE II.

ψ	A_T	B_T	C_T	D_T
$\bar{\psi}$	A_T	B_T	D_T	C_T

(Incidentally, we note that Pauli's operator would yield exactly the same results).

1.2. — Interaction Hamiltonian.

The problem is now to prescribe the types under both I_S and I_T of each of the spinors representing the five spinors P, N, μ, e, ν which occur in processes (I), and to suitably define a Hamiltonian interaction that remains invariant under both I_S and I_T only for those among the processes allowed by charge conservation that are compatible with experimental observation.

It will be helpful for a better understanding of the kind of arbitrariness that faces us to recall YANG and TROMNO's observation that if P, N and e are of type A_S and ν is of type B_S , then the correct scalar invariant Hamiltonian density for β -decay is

$$\bar{\psi}_P^* \gamma_4 \psi_N \bar{\psi}_e^* \gamma_4 \gamma_5 \psi_\nu = (\gamma_4)_{\alpha\beta} (\gamma_4)_{\gamma\delta} (\gamma_5)_{\epsilon\delta} \bar{\psi}_{P\alpha} \psi_{N\beta} \bar{\psi}_{e\gamma} \psi_{\nu\delta},$$

where now $(\gamma_4)_{\alpha\beta} (\gamma_4)_{\gamma\delta} (\gamma_5)_{\epsilon\delta}$ is a tensor density under transformations of the orthochronous Lorentz group, which is just what is needed for the overall invariance. (The word « tensor » is of course used in the sense of VAN DER WAERDEN's spinor calculus, where antilinear as well as linear transformations are considered).

With this example in mind, and guided by an analogical reasoning based on the fact that the permutation symbol $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is conveniently promoted in ordinary tensor calculus to the role of a relative tensor of weight $+1$ (or -1 , according to the type of variance), we can now substitute the Wigner-Critchfield interaction among any four fermions r, s, t, u

$$H_{rstu} = g \int d^3x \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\alpha^{(r)}(x) \psi_\beta^{(s)}(x) \psi_\gamma^{(t)}(x) \psi_\delta^{(u)}(x),$$

say in the q -number theory, with an interaction which has exactly the same formal expression, but where $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, as already before $(\gamma_4)_{\alpha\beta} (\gamma_4)_{\gamma\delta} (\gamma_5)_{\epsilon\delta}$, is now to be interpreted as a tensor density with respect to the extended Lorentz group (again in the sense of the spinor calculus). This brings immediately

in the fact that now also the product of the spinors must transform as a tensor density. This prescription, *and only indeed one of this type*, automatically rules out all the processes in which four alike particles occur, such as $N + N \rightarrow \bar{N} + \bar{N}$.

The next step will be to actually find out which types can be assigned to the five fermions in consideration so to fulfil the requirements stated above. Before going into this, we wish to repeat in this connection the remark, to be found already in ref. (2), that one could in the following substitute the consideration of time inversion with that of charge conjugation, nothing being changed by this in the arguments reported below. It will also clearly appear that all that is needed in our proof is the assumption of an interaction Hamiltonian of such a nature, that the products of spinors must transform like a tensor density under the extended Lorentz group; this assumption appears also as a necessary one if our aim is to be achieved by means of considerations based solely on arguments of relativistic invariance.

1.3. — Allowable types for P , N , μ , e , ν .

These are immediately found by considering each process allowed by charge conservation as an element of a set, which appears obviously as the union of three disjoint sets a , b , c , containing respectively:

- a : processes involving no charges,
- b : » » two charges,
- c : » » four charges.

Consider first the set a : by attributing to ν , N in turn all possible types under I_S , one finds that to each assignment S corresponds a subset a_S of a whose elements are those of the processes of a that remain allowed by the requirement of invariance of the Hamiltonian density under I_S . The same is repeated for I_T , to each assignment corresponding another subset a_T of a . It is important to notice that the set of all subsets a_S coincides (to the order) with the set of all subsets a_T . Considering the intersections of all subsets a_S with all subsets a_T , one notices that the a priori possible assignments (S, T) split into three classes: I, forbidding all of the processes in a ; II, allowing only the processes $\nu + \bar{\nu} \rightarrow \nu + \nu$ and $N + \bar{N} \rightarrow \nu + \nu$; III, allowing also processes which are to be rejected on experimental grounds.

We pass then to consider the set b , and try in a similar way assignments of types to P , μ , e under I_S and I_T . It results that *none* of the assignments for ν , N of the previous class I yields now satisfactory results, while those of class II can be combined with suitable assignments for P , μ , e so to yield only

processes (I) and (II) (and their charge conjugates). Finally, it is easily verified that these choices forbid all the processes belonging to c .

Table III contains a few of the possible assignments that solve the problem; nothing would be gained by reporting the complete list.

TABLE III.

ν	N	P	e	μ
$A_S C_T$	$C_S C_T$	$C_S A_T$	$A_S B_T$	$A_S B_T$
$A_S C_T$	$A_S A_T$	$A_S A_T$	$A_S C_T$	$A_S C_T$
$A_S C_T$	$C_S D_T$	$C_S A_T$	$A_S A_T$	$A_S A_T$
$A_S C_T$	$B_S A_T$	$A_S A_T$	$B_S C_T$	$B_S C_T$

A typical feature is that in any case neutrino and antineutrino result of different types, as exemplified in table III. If this theory were correct, this would be an argument against the Majorana theory, or viceversa.

2. - Some predictions of the theory.

Only the final results will be reported, as the calculations involved are quite elementary, although tedious. It should be kept in mind that these results are what the ordinary Wigner-Critchfield interaction would yield, and their failure to compare with experiment would be an argument against the particular Hamiltonian used in this work, rather than against the considerations of a more general nature which formed the object of the preceding section.

The sum over all spins of the square modulus of the Hamiltonian for three fermions of masses m_1, m_2, m_3 , with a neutrino of mass zero as fourth particle, is, in natural units (\mathbf{v} velocity of particle specified by subscript):

$$\sum_{\text{all spins}} |H|^2 = \frac{1}{2} g^2 \left\{ 3 + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k) \left[-1 + \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{v}_{k+2} + \frac{m_{k+1} m_{k+2}}{E_{k+1} E_{k+2}} \right] - \sum_{k=1}^3 \left[\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_{k+1} + \frac{m_k m_{k+1}}{E_k E_{k+1}} \right] \right\} \quad (\text{indices taken mod. } 3).$$

From the above formula all processes can be easily evaluated.

a) β -decay of a neutron at rest. — Let $m_1 = M_N$, $m_2 = M_P$, $m_3 = m_e$, ε and ε_0 energy and maximum energy of the emitted electron in units of $m_e c^2$. The decay probability in the electron energy range $\varepsilon \div \varepsilon + d\varepsilon$ is given, in ordinary units, by:

$$dW_\beta = \frac{1}{16\pi^3} g^2 \frac{m_e^5 c^4}{\hbar^7} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \varepsilon d\varepsilon.$$

(This result has been evaluated only to the first significant power of m_e/M , $M = (M_N + M_P)/2$). This formula is in perfect agreement with experiment, once the value of g is properly chosen.

b) μ -decay into electron + two neutrinos. — This will be the crucial point for testing the validity of our Hamiltonian, since no completely reliable data are as yet available on this decay. In ordinary units we find (no approximations have been made in this derivation):

$$dW_\mu = \frac{1}{16\pi^3} g^2 \frac{m_\mu m_e^4 c^4}{\hbar^7} \left[\frac{1}{3} (\varepsilon^2 - 1) + (2\varepsilon - 1)(\varepsilon_0 - \varepsilon) \right] \sqrt{\varepsilon^2 - 1} d\varepsilon.$$

c) Two-neutrino pair annihilation. — The calculation of the cross section for this process is rendered easier by carrying it out first in the c.m. system, and then transforming the result obtained into the laboratory system by means of a Lorentz transformation. The particle is assumed to be at rest in the laboratory system, momentum and energy of the colliding antiparticle are denoted by \mathbf{P}_0 and E_0 . One finds, with $\gamma = E_0/Mc^2$:

$$\sigma_{\text{lab}} = \frac{1}{96\pi} \frac{g^2 M^2}{\hbar^4} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} [17\gamma - 5].$$

Considering the positron annihilation, $M = m_e$, it is apparent that this process is, in the usual energy range, completely negligible with respect to the two-photon annihilation. This formula exhibits the analogue of the infrared catastrophe. Finally, we mention as a curiosity the cross section in the « c.m. system » ($\mathbf{P}_\nu + \mathbf{P}_{\bar{\nu}} = 0$, $E = E_\nu = E_{\bar{\nu}}$) for the process $\nu = \bar{\nu} \rightarrow \nu + \nu$:

$$\sigma_\nu = \frac{17}{48\pi} \left(\frac{g}{\hbar^2 c^2} \right)^2 E^2.$$

The results in c) are essentially new; the reliability of the particular formulae obtained rests upon that of the Hamiltonian used. It seems that, in any case, the consideration of processes (II) together with processes (I) is imposed by the very nature of the problem.

In conclusion, it is a pleasure to thank Dr. A. S. WIGHTMAN for illuminating discussions on the nature of the time inversion operator and Dr. R. SCALETTAR for an interesting discussion on the Wigner-Critchfield interaction.

RIASSUNTO

Viene riesaminata la possibilità di una interazione alla Fermi di validità universale. Si mostra che la questione può essere risolta in senso affermativo, pur di accettare la possibilità di processi consistenti nell'annichilamento di coppie particella-antiparticella con conseguente creazione di due neutrini. Le sezioni d'urto per tali processi risultano estremamente piccole. Una particolare Hamiltoniana viene usata a scopo di esemplificazione e per determinare almeno qualitativamente le predizioni di tale teoria; non si intende però con ciò in nessun modo affermare che tale scelta debba riguardarsi come definitiva.

On the Double Scattering of Mesons by Nucleons.

M. CINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

L. A. RADICATI

Istituto di Fisica dell'Università - Parma ()*

(ricevuto l'11 Maggio 1951)

Summary. — Differential and total cross-sections are given for the double scattering of pseudoscalar mesons by nucleons. The total cross-section is compared with that for the single scattering. The cross-section is also compared with that resulting from a more crude calculation using the method of HEITLER and NORDHEIM.

1. — Introduction.

Calculations on the scattering of mesons by nucleons have been published by many Authors ⁽¹⁾. It is not possible at present to compare these calculations with experiments, and to draw in this way some information on the nature of π -mesons. However some indications seem to favour the hypothesis that π -mesons are pseudoscalar, ruling out the alternative possibility of scalar mesons ⁽²⁾. It is not known whether it is sufficient to assume a pure pseudoscalar coupling, or the presence of pseudovector coupling is also required, since the equivalence theorem does not hold in this case, as discussed by MARSHAK *et al.* ⁽²⁾.

It is the purpose of this paper to study the double scattering of pseudo-

(*) In congedo dall'Istituto di Fisica del Politecnico di Torino.

⁽¹⁾ J. ASHKIN, A. SIMON and R. E. MARSHAK: *Progr. Theor. Phys.*, **5**, 634 (1950); M. PESHKIN: *Phys. Rev.*, **81**, 425 (1951); M. CINI and L. A. RADICATI: *Nuovo Cimento*, **7**, 317 (1951); in the following referred to as I.

⁽²⁾ R. E. MARSHAK, S. TAMOR and A. S. WIGHTMAN: *Phys. Rev.*, **80**, 765 (1950); W. K. H. PANOFSKY, R. L. AAMODT and J. HADLY: *Phys. Rev.*, **81**, 565 (1951); K. BRUECKNER, R. SERBER and K. WATSON: *Phys. Rev.*, **81**, 575 (1951).

scalar mesons with pseudoscalar coupling by nucleons, i.e. the collision of a meson against a nucleon with the emission of two mesons. The problem may be of some interest in order to decide whether multiple processes can be accounted for by the usual meson theories.

The only available calculations in the analogous electromagnetic case (double Compton scattering) have been performed by HEITLER and NORDHEIM⁽³⁾ introducing some rather crude approximations. Using the same method one obtains in our case, as will be shown later, a total cross-section considerably different from the one resulting from more refined calculations. By the way it should be noted that also in the electromagnetic case one can not exclude a behaviour of the cross-section rather different from that obtained by the Authors quoted above.

In the following the exact differential cross-section is deduced in third order perturbation theory using Feynman's method⁽⁴⁾. For the evaluation of the total cross-section some approximations are used because the calculations are very complicated.

2. - Matrix element.

Many different double scattering processes may take place in a collision of a π^- meson against a nucleon, and each of them can happen in different ways through two subsequent intermediate states, as shown by Feynman's diagrams of fig. 1, 2, 3, 4, 5.

Denoting with P and N respectively a proton and a neutron and with π^+ , π^- , π^0 , positive, negative, neutral mesons, these processes are:

$$(1) \pi_0^+ + P \rightarrow \pi_1^+ + \pi_2^+ + N.$$

Only two diagrams are possible because of charge conservation: first π_1^+ is emitted, after the incident π_0^+ is ab-

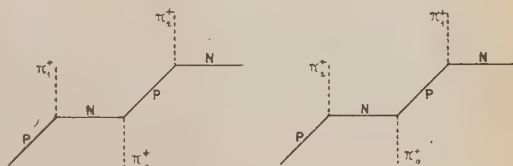


Fig. 1.

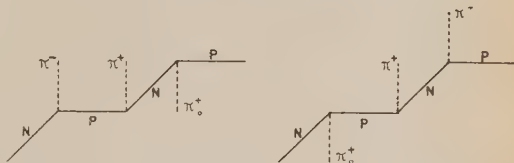


Fig. 2.

⁽³⁾ W. HEITLER and L. NORDHEIM: *Physica*, 1, 1059 (1934); see also W. HEITLER: *The quantum theory of radiation*, 2th ed. (Oxford, 1944), pag. 178.

⁽⁴⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, 76, 749 (1949).

sorbed and finally π_2^+ is emitted; in the second diagram, π_1^+ and π_2^+ are interchanged.

- (2) $\pi_0^+ + N \rightarrow \pi^+ + \pi^- + P$
- (3) $\pi_0^+ + N \rightarrow \pi^0 + \pi^+ + N$
- (4) $\pi_0^+ + P \rightarrow \pi^0 + \pi^+ + P$
- (5) $\pi_0^+ + N \rightarrow \pi_1^0 + \pi_2^0 + P$.

Analogous processes take place if the incident meson is negative: one can

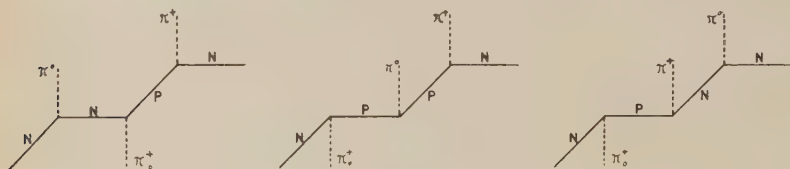


Fig. 3.

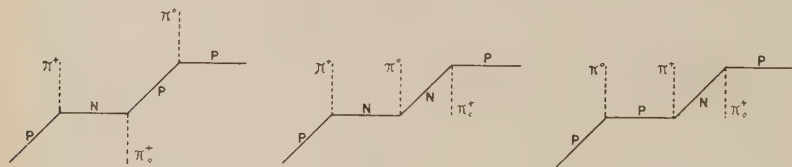


Fig. 4.

obtain the corresponding diagrams interchanging negative with positive mesons and neutrons with protons.

The calculations have been performed only for cases (1) and (2). The other possibilities will be discussed briefly.

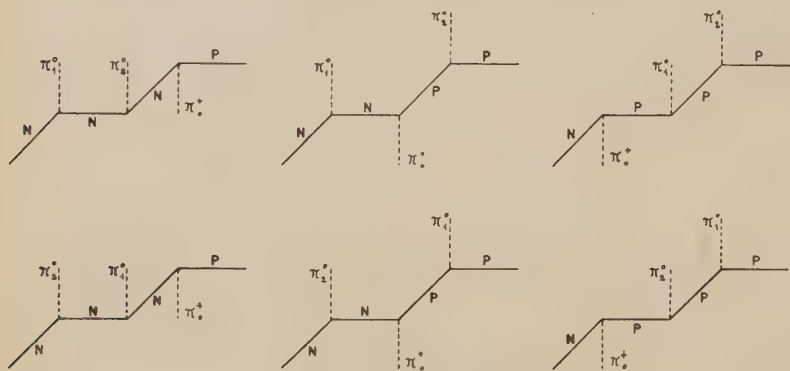


Fig. 5.

The following symbols have been used:

- k_0, k_1, k_2 energy-momentum fourvectors of the incident and of the two emitted mesons, whose components are $W_0, \mathbf{k}_0; W_1, \mathbf{k}_1; W_2, \mathbf{k}_2$ respectively.
- p_1, p_2 energy-momentum fourvectors of the nucleon before and after the collision: components $E_1, \mathbf{p}_1; E_2, \mathbf{p}_2$.
- u_1, u_2 spinors of the nucleon before and after the collision, normalised so that $\bar{u}u = 1$, where $\bar{u} = u^*\gamma_4$.
- M, m nucleon and meson masses respectively.
- g coupling constant of mesons with nucleons.
- $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ where the γ_μ are the same as defined in Feynman's paper ⁽⁴⁾.
- $(ab) = a_4b_4 - a_3b_3 - a_2b_2 - a_1b_1$.
- $\alpha = a_\mu\gamma_\mu = a_4\gamma_4 - a_3\gamma_3 - a_2\gamma_2 - a_1\gamma_1$ for any four vector a_μ .
- θ_1, θ_2 angles of \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 with \mathbf{k}_0 in the laboratory system (e.g. the system in which the nucleon is initially at rest). See fig. 6.
- φ Angle between the planes $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1)$ and $(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_2)$ in the same system.

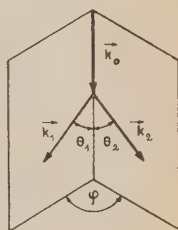


Fig. 6.

The total matrix element for process (1), obtained adding the contributions from the two diagrams of fig. 1 is:

$$(1) \quad \mathcal{M} = g^3 \sqrt{\frac{(2\pi)^3 M^2}{W_0 W_1 W_2 E_1 E_2}} \bar{u}_2 \times \\ \times \left\{ \gamma_5 \frac{1}{p_2 + k_2 - M} \gamma_5 \frac{1}{p_1 - k_1 - M} \gamma_5 + \gamma_5 \frac{1}{p_2 + k_1 - M} \gamma_5 \frac{1}{p_1 - k_2 - M} \gamma_5 \right\} u_1.$$

The square of the matrix element (1) can be computed with standard methods summing on the initial and final spins of the nucleon; one obtains

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{(2\pi)^3 g^6}{2 W_0 W_1 W_2 E_1 E_2} \times \\ \times \left\{ -m^2 [-m^2(p_1 p_2) + 2(p_1 k_1)(p_2 k_1) + 2(p_2 k_2)(p_1 k_2) + m^2 M^2] \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{[m^2 + 2(p_2 k_2)][m^2 - 2(p_1 k_1)]} - \frac{1}{[m^2 + 2(p_2 k_1)][m^2 - 2(p_1 k_2)]} \right]^2 + \\ + \frac{4(p_1 k_1)(p_2 k_2)(k_1 k_2)}{[m^2 + 2(p_2 k_2)]^2 [m^2 - 2(p_1 k_1)]^2} + \frac{4(p_1 k_2)(p_2 k_1)(k_1 k_2)}{[m^2 + 2(p_2 k_1)]^2 [m^2 - 2(p_1 k_2)]^2} - \\ \left. - 4 \frac{(k_1 k_2)[(p_1 k_2)(p_2 k_1) + (p_1 k_1)(p_2 k_2) - (k_1 k_2)(p_1 p_2) + (k_1 k_2)M^2]}{[m^2 + 2(p_2 k_2)][m^2 - 2(p_1 k_1)][m^2 + 2(p_2 k_1)][m^2 - 2(p_1 k_2)]} \right\}.$$

By means of the relation

$$(3) \quad p_1 + k_0 = p_2 + k_1 + k_2,$$

which expresses the conservation of the fourmomentum, one can eliminate p_2 from equation (2). The expression obtained is rather involved. It is possible to introduce some approximations taking into account the fact that the products $(p_\sigma k_\sigma)$ ($\sigma = 1, 2$; $\sigma = 0, 1, 2$) are always bigger than m^2 . One can therefore develop all terms resulting from eq. (2) in powers of $m^2/(p_\sigma k_\sigma)$. The result, up to terms in m^2 is in the laboratory system

$$(4) \quad |\mathcal{M}|^2 = \frac{\pi^3 g^6}{M^2 E_2 W_0 W_1 W_2} \times \\ \times \left\{ \frac{\alpha^2 [W_0 - W_1 - W_2]}{4[M + W_0(1 - \cos \theta_1) - \alpha W_2][M + W_0(1 - \cos \theta_2) - \alpha W_1]} \right\},$$

where

$$\alpha = 1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi - \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

The terms having m^2 as a factor are twentyfive and we shall not write them explicitly; their contribution to the total cross-section will be discussed later.

3. — Differential cross-section.

The differential cross-section for the emission of one meson in the solid angle $2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$ with momentum in the interval $|\mathbf{k}_1| \rightarrow |\mathbf{k}_1| + d|\mathbf{k}_1|$ and a second one in the solid angle $\sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi$ (the energy W_2 of the second meson is determined by the conservation of energy and momentum) is

$$(5) \quad d\sigma = \frac{(2\pi)^2}{(2\pi)^6} |\mathcal{M}|^2 \frac{W_0}{|\mathbf{k}_0|} \frac{\partial |\mathbf{k}_2|}{\partial E_f} k_1^2 k_2^2 d|\mathbf{k}_1| \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi,$$

where $E_f = E_2 + W_1 + W_2$ is the final energy and $\partial E_f / \partial |\mathbf{k}_2|$ is the density of final states.

In order to perform the integration on $|\mathbf{k}_1|$ in eq. (5) we must express $|\mathbf{k}_2|$ and W_2 as functions of W_0 , W_1 , θ_1 and θ_2 . Since W_2 differs from $|\mathbf{k}_2|$ by terms of order m^2/W_2^2 or smaller, we will develop the expression for W_2 in power series of m^2/W_1^2 analogously to what has been done for the squared matrix element. We obtain

$$(6) \quad W_2 = \frac{W_1[M + W_0(1 - \cos \theta_1)] - MW_0}{W_1\alpha - M - W_0(1 - \cos \theta_2)} + m^2\{\dots\} + \dots$$

In the same way follows the expression

$$(7) \quad \frac{\partial |\mathbf{k}_2|}{\partial E_f} = \frac{E_2 W_2}{M(W_0 - W_1) - W_0 W_1 (1 - \cos \theta_2)} + m^2 \{ \dots \} + \dots$$

We will briefly discuss eq. (6) considering only the first term in order to examine the possible values of W_1 and W_2 in connection with angles θ_1 and θ_2 . For a fixed value of θ_2 , W_2 reaches its maximum when W_1 is minimum; we have approximately

$$W_{2 \max} = \frac{W_0 M}{M + W_0 (1 - \cos \theta_2)}.$$

Conversely W_1 can not be greater than

$$(8) \quad W_{1 \max} = \frac{W_0 M}{M + W_0 (1 - \cos \theta_1)},$$

because for this value $W_2 = 0$. Actually the exact maximum values of W_1 and W_2 are a little smaller because it is not possible that $W_1, W_2 < m$. Anyhow this is still a good approximation since $W_0 \gg M$.

4. — Total cross-section.

The term of the total cross-section independent from m^2 can be obtained introducing in eq. (5) the approximate expressions (4), (6), (7). As we are interested only in the asymptotic value of the cross-sections σ for $W_0 \gg M$, we shall only retain in the integration the highest term in the development of σ in ascending powers of M/W_0 .

With some rather tedious calculations (see Appendix) we obtain

$$(9) \quad \sigma \cong \frac{g^6}{96 M^2} \frac{M}{W_0} \{ (\ln 2 W_0 / M)^2 + 3 \ln 2 W_0 / M \}.$$

The contributions to the cross-section arising from the terms containing m^2 as a factor in eqs. (4), (6), (7) can be roughly evaluated. Some of them are obtained by substitution of W_1^2 or W_2^2 or MW_0 with m^2 in the term already considered. The order of magnitude of the others can be estimated replacing W_2 with its minimum value m in the denominators or with its maximum (see eq. (8)) in the numerators. In no case a contribution bigger than $(m^2/M^2)\sigma$ has been found. Although these terms are in a great number, it is very likely that they do not alter appreciably the result (9).

5. - Discussion.

As one can see from fig. 2 the matrix element for the corresponding process can be obtained with the substitution of k_2 with $-k_0$ in eq. (1). Using the method outlined above, the approximate integration of the differential cross-section can be performed also in this case. One finds a result quite similar to the one reported above with the same dependence on W_0 as expression (9).

We have not carried out the calculations for the other cases; for processes (3) and (4) nothing else can be said but to infer in analogy with the result of the single scattering ⁽⁵⁾, that the order of magnitude of the cross-section is about the same. For process (5) one can state that the terms already calculated are present, because the diagrams of figs. 1 and 2 are all contained in fig. 5. Unless some rather unlikely interference effects destroy these terms, the total cross-section for this case is at least of the above mentioned order of magnitude.

It follows from these considerations that the ratio between double and single scattering is very slightly increasing with energy ⁽⁶⁾. Not much can be said about the numerical value of this ratio because processes (3), (4), and (5) have not been calculated: the ratio between the cross-section (9) and the cross-section for the corresponding single process ⁽⁶⁾ is

$$(10) \quad \frac{g^2}{48\pi} (3 + \log 2W_0/M).$$

The numerator must be increased to allow for the contribution of the process (4). For a rough estimation one can multiply expression (10) by factor 2 in order to account for this process.

We want to discuss briefly the result that one would obtain using the above mentioned method of HEITLER and NORDHEIM ⁽⁴⁾. Following the same procedure, the differential cross-section is written

$$d\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 W_1^2 W_2^2 dW_1,$$

where

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{g^6}{M^2} \frac{1}{W_0^2 W_1 W_2 E_2}.$$

Assuming, as done by HEITLER and NORDHEIM, that the main contribution to the total cross-section in the extreme relativistic case, arises from large

⁽⁵⁾ See I eqs. (5a) and (5b).

⁽⁶⁾ See I eq. (5c).

angles of scattering, in which case $W_1 \leq W_2 \leq M$, $E_2 \leq W_0$, we have

$$(11) \quad \sigma \leq \frac{g^6}{M^2} \frac{1}{W_0^3}.$$

The same expression is easily found for all other processes, which supports our assumption that processes (3), (4) and (5) yield cross-sections similar to expression (9).

The result (11), however, differs considerably from the one obtained by us. Since quantum electrodynamics is supported by unobjectionable evidence, while the same can not be said for meson theories, a more careful investigation of double Compton scattering would be desirable.

APPENDIX

The differential cross-section, neglecting terms containing the factor m^2 , can be written, by means of eqs. (4), (5) and (6)

$$d\sigma = d\sigma_0 - d\sigma_1 - d\sigma_2,$$

where

$$\begin{aligned} d\sigma_0 = & \frac{g^6}{4\pi M W_0} \frac{W_1 W_2^2}{M W_0 - W[M + W_0(1 - \cos \theta_1)]} \times \\ & \times \frac{W_0 \alpha^2 dW_1 d\varphi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin \theta_2 d\theta_2}{4M[M + W_0(1 - \cos \theta_1) - W_2 \alpha][M + W_0(1 - \cos \theta_2) - W_1 \alpha]} \\ & (q = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

We shall carry in detail the integration of $d\sigma_0$; the others are quite similar.

Integration of $d\sigma_0$. — Eliminating W_2 by means of eq. (7) we have

$$\begin{aligned} d\sigma_0 = & \mathcal{F}(\theta_1, \theta_2, \varphi, W_1) dW_1 d\varphi d\cos \theta_1 d\cos \theta_2 = \\ = & \frac{g^6}{16\pi M^2 W_0} \frac{\alpha^2 d\varphi d\cos \theta_1 d\cos \theta_2}{[M^2 + W_0(W_0 + M)(1 - \cos \theta_1)(1 - \cos \theta_2) + W_0 M \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi]} \times \\ & \times \frac{W_1 W_0 M - W_1^2 [M + W_0(1 - \cos \theta_1)]}{[M + W_0(1 - \cos \theta_2) - \alpha W_1]^2} dW_1. \end{aligned}$$

Integrating on W_1 from 0 to $W_0 M / [M + W_0(1 - \cos \theta_1)]$ (see eq. (8)), we can develop the result in powers of $\frac{\alpha W_0 M}{[M + W_0(1 - \cos \theta_1)][M + W_0(1 - \cos \theta_2)]}$

which is always a small quantity for all angles θ_1 and θ_2 . We obtain

$$\begin{aligned} d\varphi \, d\cos\theta_1 \, d\cos\theta_2 \int \mathcal{F}(\theta_1, \theta_2, \varphi, W_1) dW_1 &= \frac{g^6 W_0^3 M}{96\pi} \times \\ &\times \frac{\alpha^2 d\varphi \, d\cos\theta_1 \, d\cos\theta_2}{[M^2 + W_0(W_0 + M)(1 - \cos\theta_1)(1 - \cos\theta_2) + W_0 M \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi]} \times \\ &\times \frac{1}{[M + W_0(1 - \cos\theta_1)]^2 [M + W_0(1 - \cos\theta_2)]^2}. \end{aligned}$$

The integration on φ from 0 to 2π is of the type

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a + b \cos \varphi)^2}{a' + b' \cos \varphi} d\varphi = 2\pi \left[\frac{2ab}{b'} - \frac{a'b^2}{b'^2} + \frac{a^2b'^2 + a'^2b^2}{b'^2 \sqrt{a'^2 - b'^2}} - \frac{2a'b'ab}{b'^2} \right].$$

Since $b'^2 = W_0^2 M^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2$ is negligible with respect to

$$a'^2 \cong [W_0^2(1 - \cos\theta_1)(1 - \cos\theta_2) + M^2]^2$$

for all angles θ_1, θ_2 , we may put $\sqrt{a'^2 - b'^2} \cong a'$; we obtain

$$\int_0^{2\pi} \frac{(a + b \cos \varphi)^2}{a' + b' \cos \varphi} d\varphi \cong 2M \frac{a^2}{a'}.$$

The result is

$$\begin{aligned} d\cos\theta_1 \, d\cos\theta_2 \int d\varphi \int \mathcal{F}(\theta_1, \theta_2, \varphi, W_1) dW_1 &= \frac{g^6}{48} W_0^3 M \times \\ &\times \frac{(1 - \cos\theta_1 \cos\theta_2)^2 d\cos\theta_1 \, d\cos\theta_2}{[M^2 + W_0^2(1 - \cos\theta_1)(1 - \cos\theta_2)][M + W_0(1 - \cos\theta_1)]^2 [M + W_0(1 - \cos\theta_2)]^2}. \end{aligned}$$

Finally the integration on $\cos\theta_1$ and $\cos\theta_2$ must be performed. Putting $x = 1 - \cos\theta_1$; $y = 1 - \cos\theta_2$; $W_0/M = w_0$, the integral becomes

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \int d\cos\theta_1 \int d\cos\theta_2 \int d\varphi \int \mathcal{F}(\theta_1, \theta_2, \varphi, W_1) dW_1 = \\ &= \frac{g^6 w_0^3}{48 M^2} \int_0^2 dy \int_0^2 \frac{x^2 + y^2 + 2xy + x^2 y^2 - 2x^2 y - 2xy^2}{(1 + w_0 y)^2 (1 + w_0 x)^2 (1 + w_0^2 xy)} dx. \end{aligned}$$

The main contribution to the integral arises from the terms $x^2 + y^2 + 2xy$ in the numerator, the other terms giving only contributions of order $1/w_0$ with respect to the former ones; under the same approximations used above

we can therefore neglect them and obtain

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{g^6 w_0^3}{48 M^2} \int_0^2 dy \int_0^2 \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{(1 + w_0 x)^2 (1 + w_0 y)^2 (1 + w_0^2 xy)} dx \cong \\ &\cong \frac{g^6}{48 M^2} \frac{1}{w_0} [(\ln 2w_0)^2 + 3].\end{aligned}$$

In deriving this result we have also neglected 1 with respect to w_0 .

Exactly in the same way $d\sigma_1$ and $d\sigma_2$ can be integrated to give eq. (9). The same methods have been used to check that terms containing the factor m^2 are always smaller than the result now obtained.

RIASSUNTO

Si ricava la sezione d'urto differenziale e totale per il doppio scattering di mesoni pseudoscalari da parte di nucleoni. La sezione d'urto totale così ottenuta viene confrontata con quella per lo scattering semplice. Inoltre si paragonano i risultati del presente calcolo con quelli che si ottengono usando il metodo approssimato già utilizzato da HEITLER e NORDHEIM nell'analogo caso elettromagnetico.

Fotoproduzione di mesoni nel Deuterio.

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 18 Maggio 1951)

Riassunto. — Si studia nel presente lavoro l'effetto del legame e più in particolare del principio di Pauli sulla fotoproduzione di mesoni nel Deuterio in modo indipendente da una particolare teoria mesonica; ciò è reso possibile dal limitarsi a considerare il rapporto tra le sezioni d'urto per fotoproduzione in Deuterio ed in Idrogeno. Come mostra la tabella a pag. 567 (per fotoni di 300 MeV) il principio di Pauli riduce considerevolmente la sezione d'urto del processo di fotoproduzione ai piccoli angoli (fino a $20-25^\circ$) se la probabilità γ^2 che lo spin di uno dei nucleoni non si rovesci durante il processo è 1. L'effetto del principio di Pauli è invece trascurabile se la probabilità di rovesciamento è 1. È sperabile che esperienze possano, sulla base di questi risultati, decidere con che probabilità si ha durante la fotoproduzione rovesciamento dello spin, sì da confermare i risultati di PANOFSKY e coll. sull'assorbimento non radiativo di mesoni π in Deuterio.

1. — Introduzione.

Desideriamo studiare in questa nota in maniera indipendente da una particolare teoria mesonica l'effetto del legame nucleare e della presenza di vari (due) nucleoni sulla fotoproduzione dei mesoni. Il caso del Deuterio è il più semplice assoggettabile a calcoli di una certa esattezza. Mostriamo che pur di limitarsi alla considerazione di rapporti — quali quello tra la sezione d'urto per fotoproduzione di mesoni in deuterio ed in idrogeno — si possono effettivamente fare delle previsioni indipendenti da questa o quella teoria mesonica.

Gli effetti del legame sulla fotoproduzione sono sostanzialmente due, di natura essenzialmente diversa. Il *primo effetto* che potremo dire diretto, implica la considerazione dei seguenti due punti: 1) le relazioni di conservazione

energia-impulso sono diverse per nucleoni liberi e per nucleoni inizialmente legati; 2) gli elementi di matrice del processo di fotoproduzione sono essi pure in generale diversi dal caso dei nucleoni liberi, contenendo, nel caso dei nucleoni legati, in qualche modo l'energia di legame.

Il *secondo effetto*, più indiretto, è dovuto al principio di esclusione di Pauli e la sua importanza è stata rilevata in problemi analoghi (assorbimento di mesoni legati in un deutone ⁽¹⁾, scattering di mesoni π ⁽²⁾) da B. FERRETTI. Anche nel caso di cui ci occupiamo ora, contrariamente a quanto si potrebbe a prima vista pensare a causa delle energie relativamente alte che entrano in giuoco (supporremo in tutto il seguito l'energia k_0 del fotone incidente pari a 300 MeV) quest'effetto può avere, come passiamo subito a vedere con una considerazione di ordini di grandezza, una notevole importanza nel diminuire in certe condizioni la sezione d'urto di produzione ai piccoli angoli di emissione del mesone; avevamo già accennato a questo punto in un precedente lavoro ⁽³⁾.

Per rendere più facile la considerazione di ordini di grandezza di quest'effetto che ora faremo, supporremo anzi che l'effetto diretto del legame manchi del tutto, ossia che per quanto riguarda la conservazione dell'energia e dell'impulso i nucleoni si comportino come se fossero liberi ed inizialmente in quiete l'uno rispetto all'altro. L'effetto del principio di Pauli per il nostro problema può allora essere espresso come segue: quando si ha emissione di un mesone il deutone si trasforma in un sistema di due particelle aventi lo stesso spin isotopico; se la emissione del mesone avviene allora senza cambiamento della orientazione dello spin di uno dei due nucleoni, gli spin restano, com'erano nello stato fondamentale del deutone, paralleli; di modo che, affinché la funzione d'onda finale dei due nucleoni sia completamente antisimmetrica, visto che è simmetrica di carica e simmetrica di spin, occorre che essa sia spazialmente antisimmetrica. Ciò implica delle limitazioni sulle possibili transizioni (rispetto al caso in cui il principio di Pauli non fosse efficace) limitazioni del cui ordine di grandezza possiamo renderci conto con la seguente considerazione: lo stato finale di moto relativo dei nucleoni rispetto al sistema del baricentro del deutone dopo il processo non potrà essere rappresentato da una funzione d'onda di numero quantico azimutale pari (quindi in particolare non potrà essere un'onda S) in quanto in tal caso la transizione è proibita. Se i nucleoni si muovono alla fine con un impulso relativo \mathbf{P} la funzione d'onda $\exp[i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}]$ (\mathbf{x} = coordinate relative) che rappresenta questo moto, può svi-

⁽¹⁾ B. FERRETTI: *Phys. Soc. Camb. Rep.*, pag. 75, (1947).

⁽²⁾ B. FERRETTI e S. GALLONE: *Phys. Rev.*, **77**, 153 (1950).

⁽³⁾ G. MORPURGO: *Nuovo Cimento*, **7**, 5-bis, 855 (1950). Le referenze bibliografiche che si trovano in tale lavoro non saranno qui riportate.

lupparsi in modo noto in onde sferiche (nelle coordinate relative). Quando il prodotto $|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{x}|$ è sufficientemente piccolo (≤ 1), intervengono, com'è noto, in questo sviluppo apprezzabilmente (per più del 70%) soltanto onde S . Ora si può prevedere che nell'elemento di matrice globale che è associato alla transizione dallo stato iniziale (stato fondamentale del deutone) allo stato finale abbia sostanzialmente importanza la forma della funzione d'onda finale a distanze comprese tra il range delle forze nucleari ed il raggio $1/\alpha$ del deutone. Risulta conseguentemente mettendosi nella peggiore ipotesi, che la parte della funzione d'onda finale importante nell'elemento di matrice conterrà prevalentemente l'onda S se:

$$|\mathbf{P}| \frac{1}{\alpha} \leq 1,$$

ossia se:

$$(1) \quad |\mathbf{P}| \leq \alpha \leq 4,5 \text{ MeV}.$$

Segue che sono proibite assai fortemente tutte quelle transizioni in cui l'energia cinetica relativa dei nucleoni dopo il processo nel sistema del baricentro del deutone è minore di:

$$(2) \quad \frac{x^2}{M} \leq 2,17 \text{ MeV}.$$

Nell'ipotesi che i nucleoni possano essere riguardati come liberi per quanto concerne la conservazione dell'energia e dell'impulso durante il processo, questo significa, nel sistema del laboratorio, che sono fortemente proibite quelle transizioni in cui l'energia cinetica relativa dei nucleoni dopo il processo è minore di $2 \cdot 2,17 \leq 4,3 \text{ MeV}$. Ora dalla (8) di ⁽³⁾ risulta subito che per un'energia del quanto incidente di 300 MeV ed un angolo di emissione di $\sim 15^\circ$ rispetto alla direzione del fotone l'energia cinetica relativa dei nucleoni dopo il processo nel sistema del laboratorio è proprio di 4,3 MeV e ciò implica che le transizioni in cui un mesone viene emesso in un cono di angolo al vertice $\sim 15^\circ$ e di asse coincidente con la direzione del fotone sono fortemente proibite (per \sim il 70%) rispetto al caso in cui il principio di Pauli non fosse efficace.

Occorre fare alcune osservazioni sulla precedente discussione:

1) Il risultato precedente vale se, come è stato detto, non si ha variazione della direzione dello spin di un nucleone durante il processo. In caso che si possa avere tale cambiamento la transizione sarà più o meno proibita a seconda che il capovolgimento dello spin succeda più o meno frequentemente. È proprio questo l'effetto che ci interessa qui di esaminare.

2) Il valore di 15° precedentemente trovato può sembrare alquanto piccolo per una verifica sperimentale. Tuttavia si può ragionevolmente sperare che le presenti tecniche consentano di rivelare l'effetto, almeno se ai piccoli angoli la sezione d'urto per fotoproduzione non è, come non sembra essere, troppo piccola.

3) Poichè l'energia relativa minima che i nucleoni possono acquistare senza che la transizione sia proibita è inversamente proporzionale al quadrato del raggio del deutone, il deutone è proprio uno dei nuclei più sfavorevoli (a questo riguardo) nell'esame dell'effetto del principio di Pauli: ciò è senz'altro ovvio in quanto è chiaro che l'effetto è tanto più forte quanto più « vicini » sono i nucleoni.

4) Si potrebbe pensare che l'aver trascurato, nel ragionamento che abbiamo svolto, l'energia cinetica e l'energia potenziale dei nucleoni agli effetti della conservazione dell'energia e dell'impulso nel processo, il trascurare cioè quello che abbiamo chiamato effetto diretto del legame non sia giustificato. Non è facile rendersi conto dell'effetto di questo fattore con un ragionamento qualitativo. I calcoli che seguiranno che confermeranno appieno le previsioni qualitative ora date, terranno conto di quella che abbiamo chiamato la prima influenza dell'effetto diretto del legame (modificazione delle relazioni di conservazione energia-impulso); mentre semplificheremo quanto più possibile la forma degli elementi di matrice del processo.

Riguardo al punto 1) notiamo che, come già nello scattering di mesoni da deutoni, anche qui i risultati consentono di distinguere tra una teoria mesonica di tipo scalare-scalare e una teoria mesonica di tipo pseudoscalare-pseudoscalare in quanto nel caso scalare, stante l'interazione mesoni-nucleoni proporzionale a β non si ha la possibilità di rovesciamento degli spin nell'emissione del mesone (il rovesciamento può essere prodotto soltanto dal campo magnetico del fotone incidente e scomparire quando si trascurano nell'elemento di matrice i termini relativistici), mentre nel caso pseudoscalare l'emissione di un mesone può avvenire con rovesciamento dello spin. Tuttavia, come abbiamo detto, nel seguito, pur utilizzando uno schema perturbativo, non ci baseremo su questa o quella determinata teoria mesonica. Potremo vedere che alla domanda: « implica la fotoproduzione dei mesoni un rovesciamento abbastanza probabile dello spin di uno dei due nucleoni? » si può rispondere in maniera abbastanza ragionevole e dettagliata indipendentemente dall'uso di una determinata teoria mesonica: uso che è assai problematico in una teoria ad accoppiamento debole.

Nel prossimo numero imposteremo il calcolo; nel n. 3 svolgeremo i punti essenziali di esso in modo da chiarire le varie approssimazioni.

2. - Impostazione del calcolo ⁽⁴⁾.

Non esiste attualmente una teoria relativisticamente covariante del deutone in quanto nello schema delle teorie attuali, l'unica teoria relativisticamente covariante potrebbe essere una in cui l'interazione tra i nucleoni viene stabilita attraverso lo stesso campo mesonico e sussistono a questo riguardo le note difficoltà sulla trattazione dei sistemi chiusi.

Ci metteremo perciò in una two-particle theory con un Hamiltoniano alla Kemmer per il deutone ⁽⁵⁾:

$$(3) \quad H_{\text{deutone}} = \alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_2 \cdot p_2 + \beta_1 M + \beta_2 M + V(r),$$

e supporremo che il processo avvenga tramite una certa perturbazione \mathcal{D} che per il momento non abbiamo bisogno di specificare ulteriormente.

Nel caso di una teoria mesonica convenzionale con accoppiamento scalare-scalare o pseudoscalare-pseudoscalare il processo potrebbe avvenire soltanto attraverso uno stato intermedio. Nel seguito le nostre considerazioni si riferiranno tanto a questo caso di un processo del second'ordine, quanto al caso più semplice in cui il processo sia possibile al prim'ordine.

Ci serve per il seguito la forma della funzione d'onda fondamentale (3S_1) del deutone.

Nel sistema in cui l'impulso del baricentro del deutone è nullo la compo-

⁽⁴⁾ Le notazioni che useremo saranno le seguenti (oltre a quelle che andremo via via introducendo):

- k = impulso del fotone incidente; k_0 sua energia;
- π = impulso del mesone prodotto; $|\pi|$ modulo del detto impulso;
- μ = massa del mesone; $\omega_\pi = \sqrt{|\pi|^2 + \mu^2}$ sua energia;
- p_i ($i = 1, 2$) = impulsi dei nucleoni prima del processo per una generica onda piana in cui si è sviluppato lo stato fondamentale del deutone;
- P_i ($i = 1, 2$) = impulsi dei nucleoni dopo il processo;
- p, p_b = impulsi relativo e baricentrale dei nucleoni prima del processo collegati ai p_i mediante le (6);
- P, P_b = impulsi relativo e baricentrale dei nucleoni dopo il processo collegati ai P_i da relazioni analoghe alle (6);
- M = massa dei nucleoni; $E_{P_i}^0$ energia cinetica di un nucleone di impulso P_i ;
- $-E_0 = \varepsilon = \alpha^2/M = 2,17 \text{ MeV}$ = energia di legame del deutone; $1/\alpha$ raggio del deutone;
- θ = angolo tra la direzione di k e quella di π .

Come ci si sarà già resi conto, usiamo unità in cui $\hbar = c = 1$.

⁽⁵⁾ N. KEMMER: *Helv. Phys. Acta*, **10**, 47 (1937).

nente grande di detta autofunzione è nelle notazioni di ROSENFELD (6):

$$(4) \quad \psi_f = {}^3(\varrho)_1 {}^1(\tau)_0 \frac{\mathcal{R}_0(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} {}^3(\sigma)_m (-1)^m.$$

Nella (4) il quanto magnetico m può assumere i valori $-1, 0, 1$ e la forma di $\mathcal{R}_0(r)$ (che dipende dalla forma assunta per l'interazione $V(\mathbf{r})$ tra i nucleoni) sarà specificata tra breve; ${}^1(\tau)_0$ è uno stato di singoletto dello spin isotopico, ${}^3(\varrho)_1$ uno stato di tripletto della variabile $\beta_1 + \beta_2$ che serve a distinguere tra componenti grandi e piccole (o meglio grandi, medie e piccole) e ${}^3(\sigma)_m$ uno stato di tripletto dello spin (spin paralleli) corrispondente ad una orientazione caratterizzata dall'indice m .

Le componenti medie e piccole della funzione d'onda dello stato fondamentale, che potrebbero ricavarsi scrivendo le equazioni di Pauli-Darwin associate all'Hamiltoniano (3), si ottengono pure in modo del tutto equivalente e più breve, applicando l'operatore:

$$(5) \quad 1 - \frac{1}{2M} [\beta_1 \alpha_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \beta_2 \alpha_2 \cdot \mathbf{p}_2],$$

alla ψ_f (e tenendo naturalmente presenti le relazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), & \mathbf{x} \equiv \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \\ \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, & \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \end{cases}$$

che legano le coordinate relative e baricentriche alle coordinate delle due particelle). Tali componenti medie e piccole sono pure date in ROSENFELD (5) e, sempre nelle notazioni di quest'Autore, le componenti medie, ad esempio, risultano essere:

$$(7) \quad \psi_f^{(1)} = {}^1(\tau)_0 \left[{}^1(\varrho)_0 \sqrt{\frac{2}{3}} Z_1^{(1)m} + {}^3(\varrho)_0 \sqrt{\frac{1}{3}} Z_1^{(1)m} \right] D_1 \mathcal{R}_0.$$

Delle componenti ${}^3(\varrho)$, possiamo completamente disinteressarci stante il loro ordine di grandezza.

È piuttosto indifferente per il seguito la forma di $V(\mathbf{r})$. Possiamo prendere, ad esempio, una buca di potenziale ed assumere come autofunzione $\mathcal{R}_0(r)$ anche all'interno della buca quella che vale all'esterno in quanto il volume della buca è molto minore del volume del deutone. Porremo perciò nelle (4) (7)

$$R_0(r) = (2\alpha)^{1/2} \exp[-\alpha r].$$

(6) L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (North-Holland Publishing Company, 1948), p. 91.

Come stato finale dei due nucleoni assumeremo un'onda piana; la cosa più naturale è allora di sviluppare pure l'autofunzione iniziale in serie di onde piane.

Una funzione d'onda generica ψ dei due nucleoni può essere scritta ovviamente nella forma (tralasciamo ora di scrivere i fattori di spin isotopico):

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi = & {}^3(\varrho)_1{}^3(\sigma)_1{}^{33}\psi_{11} + {}^3(\varrho)_1{}^3(\sigma)_0{}^{33}\psi_{10} + {}^3(\varrho)_1{}^3(\sigma)_{-1}{}^{33}\psi_{1-1} + {}^3(\varrho)_1{}^1(\sigma)_0{}^{31}\psi_{10} + \\ & + {}^3(\varrho)_0{}^3(\sigma)_1{}^{33}\psi_{01} + {}^3(\varrho)_0{}^3(\sigma)_0{}^{33}\psi_{00} + \dots + \dots + \dots \\ & + {}^3(\varrho)_{-1}{}^3(\sigma)_1{}^{33}\psi_{-11} + {}^3(\varrho)_{-1}{}^3(\sigma)_0{}^{33}\psi_{-10} + \dots + \dots + \dots \\ & + \dots + \dots + {}^1(\varrho)_0{}^3(\sigma)_{-1}{}^{13}\psi_{0-1} + {}^1(\varrho)_0{}^1(\sigma)_0{}^{11}\psi_{00}, \end{aligned} \right.$$

dove le ${}^{ik}\psi_{lm}$ sono certe 16 funzioni delle coordinate relative dei nucleoni. La trasformata di Fourier della Ψ_{ik} si ottiene perciò sostituendo nella (8) al posto delle varie ${}^{ik}\psi_{lm}$ le loro trasformate di Fourier; se indichiamo con ${}^{ik}a_{lm}(\mathbf{p})$ la trasformata di Fourier della ${}^{ik}\psi_{lm}(\mathbf{r})$, la ψ più generale si scrive quindi nel modo seguente (con notazioni evidenti):

$$(9) \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{iklm} {}^i(\varrho)_l{}^k(\sigma)_m \int {}^{ik}a_{lm}(\mathbf{p}) \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] d^3\mathbf{p}.$$

Ora l'espressione:

$$\sum_{iklm} {}^i(\varrho)_l{}^k(\sigma)_m {}^{ik}a_{lm}(\mathbf{p}),$$

(che, ad esempio, nel caso $m = 1$ si riduce a:

$${}^3(\varrho)_1{}^3(\sigma)_1{}^{33}a_{11}(\mathbf{p}) + {}^3(\varrho)_0{}^1(\sigma)_0{}^{31}a_{00}(\mathbf{p}) + {}^1(\varrho)_0{}^3(\sigma)_0{}^{13}a_{00}(\mathbf{p}) + {}^1(\varrho)_0{}^3(\sigma)_1{}^{31}a_{01}(\mathbf{p}),$$

le altre ${}^{ik}a_{lm}$ essendo nulle) non si può scrivere in generale come somma di prodotti di spinori a quattro componenti per i due nucleoni relativi a soli stati di energia positiva; ci si rende tuttavia facilmente conto che gli stati in cui uno degli spinori si riferisce ad un'energia negativa sono trascurabili.

Per chiarire ulteriormente la cosa e vedere nello stesso tempo più da vicino che cosa questa approssimazione significhi, indichiamo con $u_{\mathbf{p}_1\uparrow\downarrow}^{(1)\pm}$ i quattro spinori (normalizzati) relativi al primo nucleone di impulso \mathbf{p}_1 , con $u_{\mathbf{p}_2\uparrow\downarrow}^{(2)\pm}$ gli analoghi per il secondo nucleone; nella notazione testè usata \pm distingue tra energia positiva e negativa, \uparrow, \downarrow distingue tra le due orientazioni dello spin. Costruendo i prodotti $u_{\mathbf{p}_1\uparrow\downarrow}^{(1)\pm} \cdot u_{\mathbf{p}_2\uparrow\downarrow}^{(2)\pm}$ si hanno in tutto sedici prodotti.

Ciò che noi poco fa abbiamo asserito è precisamente che, mentre è evidentemente sempre possibile scrivere:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{iklm} {}^i(\varrho)_l{}^k(\sigma)_m {}^{ik}a_{lm}(\mathbf{p}) \equiv & c_1 u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)+} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)+} + c_2 u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)+} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)+} + c_3 u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)+} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)+} + \\ & + c_4 u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)+} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)+} + c_5 u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)-} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)+} + \dots + \dots + \dots + c_9 u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)+} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)-} + \\ & + \dots + \dots + \dots + c_{13} u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)-} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)-} + \dots + \dots + c_{16} u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)-} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)-}. \end{aligned} \right.$$

cioè determinare sedici coefficienti $c_1 \dots c_{16}$ talchè valga la (10), non è rigorosamente possibile limitarsi a secondo membro della (10) ai soli primi quattro termini in cui i nucleoni hanno entrambi energia positiva. La locuzione da noi dianzi usata « trascurare gli stati ad energia negativa » significa appunto trascurare, come faremo, i termini dal quinto al sedicesimo nella (10). Ciò è possibile in virtù della piccola energia di legame del deutone, o, se si vuole in virtù del suo grande raggio.

Con quest'approssimazione risulta allora facilmente che la funzione d'onda fondamentale con $m = 1$ che ha componenti grandi proporzionali a ${}^3(\varrho)_1{}^3(\sigma)_1$, ha anche le componenti medie pari a quelle del prodotto $u_{p_1\uparrow}^{(1)+} u_{p_2\uparrow}^{(2)+}$; di modo che si può scrivere la funzione d'onda fondamentale (con $m = 1$) nella forma:

$$(11)_1 \quad \psi_{f(m=1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} {}^1(\tau)_0 \int {}^{33}a_{11}(\mathbf{p}) u_{p\uparrow}^{(1)+} u_{-p\uparrow}^{(2)+} \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] d^3\mathbf{p}.$$

Analogamente è:

$$(11)_2 \quad \psi_{f(m=-1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} {}^1(\tau)_0 \int {}^{33}a_{11}(\mathbf{p}) u_{p\downarrow}^{(1)+} u_{-p\downarrow}^{(2)+} \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] d^3\mathbf{p},$$

$$(11)_3 \quad \psi_{f(m=0)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} {}^1(\tau)_0 \int {}^{33}a_{11}(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} \{ u_{p\uparrow}^{(1)+} u_{-p\downarrow}^{(2)+} + u_{p\downarrow}^{(1)+} u_{-p\uparrow}^{(2)+} \} \exp[i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] d^3\mathbf{p}.$$

Si noti che, come dev'essere, le dette funzioni sono antisimmetriche in quanto è: ${}^{33}a_{11}(\mathbf{p}) = {}^{33}a_{11}(-\mathbf{p})$.

Dalle (4) (11) risulta che ${}^{33}a_{11}(\mathbf{p})$, nel seguito indicato semplicemente con $a(\mathbf{p})$, è dato da (*):

$$(12) \quad a(\mathbf{p}) = - \int \frac{\mathcal{R}_0(r)}{r} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp[-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] d^3\mathbf{x} = - \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{4\pi}{\alpha^2 + |\mathbf{p}|^2}.$$

3. - Probabilità di transizione.

Si ha al solito per la sezione d'urto i (iniziale) $\rightarrow f$ (finale)

$$(13) \quad d\sigma = 2\pi \varrho_P |\mathcal{P}_{if}|^2;$$

\mathcal{P}_{if} essendo l'elemento di matrice di \mathcal{P} tra lo stato iniziale e quello finale. Nel nostro caso la parte nucleonica della funzione d'onda iniziale è data dalle (11)₁, (11)₂, (11)₃; ed assumeremo per la parte nucleonica della funzione d'onda

(*) Il fattore $\left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2}$ sarà inserito nella densità degli stati finali.

finale (trascurando l'effetto dell'interazione nucleare sulla funzione d'onda finale):

$$(14)_1 f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)} \exp [i(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_2)] - \\ - u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(2)} \exp [i(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_2)]) ,$$

$$(14)_2 f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)} \exp [i(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_2)] - \\ - u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(2)} \exp [i(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_2)]) ,$$

$$(14)_3 f_3 = \frac{1}{2} (\{ u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)} - u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)} \} \exp [i(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_2)] + \\ + (\text{scambiato } \mathbf{P}_1 \text{ con } \mathbf{P}_2))$$

$$(14)_4 f_4 = \frac{1}{2} (\{ u_{\mathbf{p}_1\uparrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\downarrow}^{(2)} + u_{\mathbf{p}_1\downarrow}^{(1)} u_{\mathbf{p}_2\uparrow}^{(2)} \} \exp [i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{x}_2)] - \\ - (\text{scambiato } \mathbf{P}_1 \text{ con } \mathbf{P}_2)) .$$

Le (14)₁, (14)₂, (14)₃, (14)₄ si riferiscono alle varie possibili orientazioni relative degli spin dei due nucleoni: \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 indicano, nel sistema del laboratorio, gli impulsi dei nucleoni stessi; le (14)₁, (14)₂, (14)₃, (14)₄ si devono pensare inoltre moltiplicate per ${}^3(\tau)_1$ o per ${}^3(\tau)_{-1}$ a seconda che si voglia considerare l'emissione di un mesone positivo o negativo. Abbiamo inoltre sottinteso l'apice + negli spinori $u_{\mathbf{p}_i}^{(i)}$.

Occorre a questo punto fare alcune ipotesi sulla forma della perturbazione \mathcal{D} che induce la transizione. Noi ammetteremo precisamente che la perturbazione \mathcal{D} sia tale che l'elemento di matrice di \mathcal{D} tra la generica funzione iniziale (11)₁ e la generica funzione (14)_k abbia la forma:

$$(15) \quad {}^{ik}\mathcal{C}^{(1)} \cdot a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) - {}^{ik}\mathcal{C}^{(2)} a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)$$

i ${}^{ik}\mathcal{C}^{(i)}$ essendo certi elementi di matrice dipendenti dalla forma di \mathcal{D} , indipendenti però dalla forma della funzione d'onda del deutone.

La forma soprascritta per l'elemento di matrice di \mathcal{D} si presenta in ogni caso in un processo che avvenga al prim'ordine quando solo si ammetta: 1) che la perturbazione \mathcal{D} che induce la transizione sia somma di due termini riferentisi ai due nucleoni (e di eventuali altri termini non contenenti le coordinate dei nucleoni); 2) che nel processo di produzione del mesone intervenga o l'uno o l'altro dei due nucleoni separatamente talchè sia:

$$(16) \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{k} = \mathbf{P}_1 + \boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{p}_2 ,$$

oppure:

$$(16') \quad \mathbf{p}_2 + \mathbf{k} = \mathbf{P}_2 + \boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{p}_1 .$$

Nella (15) non si è fatto altro, in altre parole, che utilizzare fin dal principio la conservazione dell'impulso in modo da mettere in evidenza i fattori a che caratterizzano la funzione d'onda iniziale del deutone, i ${}^{ik}\mathcal{C}^{(i)}$ restando del tutto indipendenti da tale forma.

Nel caso di processi del second'ordine quali sono quelli con cui si avrebbe a che fare nelle teorie mesoniche prima accennate, si presenta pure la forma (15) quando si assumano come stati intermedi onde piane e si trascurino i termini misti provenienti dal fatto che in virtù del legame uno dei nucleoni può emettere il mesone e l'altro assorbire il fotone. Il trascurare i termini misti è certamente corretto in una teoria scalare-scalare tali termini misti essendo in ogni caso associati al rinculo dei nucleoni. Non possiamo dire che errore possa portare in una teoria pseudoscalare senza svolgere i calcoli.

Si noti per inciso che agli effetti di un eventuale calcolo con le teorie mesoniche convenzionali nessuna difficoltà è portata dall'aver usato per i nucleoni l'equazione di Kemmer per quanto riguarda le transizioni a stati di energia negativa, quando si faccia uso negli stati intermedi di onde piane; si può vedere infatti che, nel caso di nucleoni liberi queste transizioni a stati di energia negativa sostituiscono le transizioni in cui si ha creazione di una coppia nucleone-antinucleone.

Ammessa dunque la (15) la grandezza che a noi interessa agli effetti della sezione d'urto è:

$$(17) \quad \sum_f |\mathcal{P}_{if}|^2 = \frac{1}{3} \sum_i \sum_k {}^{ik}\mathcal{C}^{(1)} a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) - {}^{ik}\mathcal{C}^{(2)} a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) \Big|^2,$$

in quanto occorre mediare sui tre valori di m possibili e sommare sulle varie possibili funzioni d'onda finali. La doppia somma in (17) può essere, tenute presenti le (11), (14) ricondotta ad una somma sulle direzioni degli spin dei singoli nucleoni.

Indicato con $\uparrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}$ (ad esempio) l'elemento di matrice (che si può ricavare dai ${}^{ik}\mathcal{C}^{(i)}$) tra uno stato in cui la funzione d'onda del nucleone che interviene nella transizione è un'onda piana con spin \uparrow ad uno stato in cui essa è un'onda piana con spin \downarrow , ed analogamente per $\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}$, $\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}$, $\downarrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}$, risulta essere:

$$(18) \quad \sum |\mathcal{P}_{if}|^2 = \frac{1}{2} S S_0 \left\{ |\mathcal{C}^{(1)}|^2 \left| a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) \right|^2 + |\mathcal{C}^{(2)}|^2 \left| a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) \right|^2 \right\} - \\ - \left\{ \uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(1)}\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(2)*} + \downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(1)}\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(2)*} + \frac{1}{2} \downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(1)}\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(2)*} + \frac{1}{2} \uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(1)}\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(2)*} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \downarrow\uparrow\mathcal{C}^{(1)}\uparrow\downarrow\mathcal{C}^{(2)*} + \frac{1}{2} \uparrow\downarrow\mathcal{C}^{(1)}\downarrow\uparrow\mathcal{C}^{(2)*} \right\} \frac{a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) a^* \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)}{3} + \text{C.C.} \Big\},$$

dove (1,2) SS_0 ha lo stesso significato che in HEITLER (*Quantum theory of Radiation*) e C.C. indica « complesso coniugato ». Nelle ipotesi fatte la (18) è del tutto generale.

Per proseguire nella discussione occorre fare alcune ipotesi sulla probabilità che si abbia cambiamento di spin di uno dei due nucleoni durante il processo. Supporremo anzitutto:

$$(19) \quad \uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)} = \downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}, \quad (i = 1, 2)$$

e:

$$(20) \quad \uparrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)} = \downarrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}, \quad (i = 1, 2)$$

ed inoltre porremo:

$$(21) \quad |\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}|^2 = \gamma^2 |T^{(i)}|^2,$$

$$(22) \quad |\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}|^2 = \delta^2 |T^{(i)}|^2,$$

con γ e δ costanti e soddisfacenti la:

$$(23) \quad \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Ciò significa ammettere che tra $|\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}|^2$ e $|\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}|^2$ sussista un rapporto costante:

$$(24) \quad \frac{|\uparrow\uparrow\mathcal{C}^{(i)}|^2}{|\downarrow\downarrow\mathcal{C}^{(i)}|^2} = \frac{\gamma^2}{\delta^2} = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2},$$

indipendente dalle varie grandezze (energie, ecc.) che entrano in giuoco nel processo.

Nel caso particolare in cui sia $\gamma^2 = 1$ (elemento di matrice per fotoproduzione con rovesciamento dello spin nullo), si ha:

$$(25) \quad \sum_f |\mathcal{P}_{if}|^2 = |T^{(1)}|^2 a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)^2 + |T^{(2)}|^2 a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)^2 - \\ - \left\{ T^{(1)} T^{(2)*} a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) a^* \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) + \text{C.C.} \right\}.$$

L'effetto del principio di Pauli è allora massimo.

In generale dalla (18) si ha, tenendo presenti le (19), (20), (21), (22):

$$(26) \quad \sum_f |\mathcal{P}_{if}|^2 = |T^{(1)}|^2 a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)^2 + |T^{(2)}|^2 a \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right)^2 - \\ - \left\{ \frac{2}{3} \gamma^2 T^{(1)} T^{(2)*} + \frac{1}{3} T^{(1)} T^{(2)*} \left\{ a \left(\mathbf{P} + \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) a^* \left(\mathbf{P} - \frac{\boldsymbol{\pi} - \mathbf{k}}{2} \right) + \text{C.C.} \right\} \right\}.$$

È chiaro che le (19) ... (24) rappresentano una schematizzazione del fenomeno quale realmente avviene; tuttavia è egualmente chiaro come, anche se in realtà γ^2 non ha un valore costante è proprio γ^2 il parametro che ci dice qual'è grosso modo la probabilità di un rovesciamento dello spin durante il processo.

4. - Densità degli stati finali e conservazione dell'energia.

Le uniche restrizioni che sussistono sui valori finali dei vari impulsi sono la conservazione dell'energia e dell'impulso totale.

Quest'ultima è contenuta nelle (16) e si scrive:

$$(27) \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{k} - \boldsymbol{\pi},$$

e la conservazione dell'energia ha la forma:

$$(28) \quad E_0 + k_0 = E_{\mathbf{p}_1}^c + E_{\mathbf{p}_2}^c + \omega_{\boldsymbol{\pi}}.$$

Tenendo presente la (27) l'unica restrizione è la seguente:

$$(29) \quad \frac{P^2}{M} = k_0 + E_0 - \omega_{\boldsymbol{\pi}} - \frac{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})^2}{4M},$$

di modo che in tutte le formule che seguono $|\mathbf{P}|$ si intenderà dato dalla (29).

La densità degli stati finali è:

$$(30) \quad \varrho_F = \frac{|\boldsymbol{\pi}|^2 d|\boldsymbol{\pi}| d\Omega_{\boldsymbol{\pi}}}{(2\pi)^3} \frac{P^2 d\Omega_P}{(2\pi)^3} \frac{d|\mathbf{P}|}{d\left(\frac{P^2}{M}\right)} = \frac{|\boldsymbol{\pi}|^2 d|\boldsymbol{\pi}| d\Omega_{\boldsymbol{\pi}}}{(2\pi)^3} \frac{P^2 d\Omega_P}{(2\pi)^3} \frac{M}{2|\mathbf{P}|}.$$

Moltiplicando ϱ_F per $2\pi \sum_f |\bar{\Phi}_{if}|^2$ si ha la sezione d'urto per emissione di un mesone di impulso compreso tra $|\boldsymbol{\pi}|$ e $|\boldsymbol{\pi}| + d|\boldsymbol{\pi}|$ nell'angolo solido $d\Omega$, l'impulso relativo dei nucleoni dopo il processo essendo contenuto in $d\Omega_P$. Integrando allora rispetto a $d\Omega_P$ a mezzo angolo solido (per tener conto del fatto che abbiamo a che fare con particelle simili) ed integrando inoltre per ciascuna direzione di emissione del mesone (caratterizzata dall'angolo, che diremo θ , tra $\boldsymbol{\pi}$ e \mathbf{k}) a tutti i valori possibili (cioè compatibili con la (29)) di $|\boldsymbol{\pi}|$ avremo la sezione d'urto per emissione di un mesone nell'angolo solido $d\Omega_{\boldsymbol{\pi}}$, indipendentemente dall'energia del mesone stesso e dalla direzione dell'impulso relativo dei nucleoni. A questo punto, per procedere oltre nella valutazione della sezione d'urto sarebbe necessario conoscere dettagliatamente la forma degli elementi di matrice $T^{(i)}$; tuttavia, come ora mostreremo, alcune

ipotesi qualitative sono sufficienti, quando non si pretenda di conoscere la sezione d'urto, ma ci si limiti a considerare il rapporto (nel seguito indicato con $\mathcal{R}_{De; \gamma/H}$) tra la sezione d'urto per fotoproduzione in Deuterio ed in Idrogeno al variare di γ e di θ .

Indichiamo anzitutto con $\sum_f |\mathcal{L}_{if}|^2$ la somma delle direzioni dello spin finale e la media su quelle dello spin iniziale del modulo quadrato dell'elemento di matrice per generazione di un mesone nell'angolo solido $d\Omega_\pi$ da parte di un nucleone libero inizialmente in quiete, di modo che:

$$(31) \quad 2\pi \frac{|\boldsymbol{\pi}| \omega_\pi}{(2\pi)^3} \sum_f |\mathcal{L}_{if}|^2 d\Omega_\pi,$$

è la sezione d'urto per il detto processo quando $|\boldsymbol{\pi}|$, ω_π si intendano nella (31) espressi a mezzo di θ tramite la relazione

$$(32) \quad |\boldsymbol{\pi}| k_0 \cos \theta = M(\omega_\pi - k_0) + k_0 \omega_\pi - \frac{\mu^2}{2}.$$

Il rapporto $\mathcal{R}_{De; \gamma/H}$ è allora dato da:

$$\mathcal{R}_{De; \gamma/H} = \frac{2\pi \int d|\boldsymbol{\pi}| \int d\Omega_P \left[\sum_f |\mathcal{P}_{if}|^2 \frac{|\boldsymbol{\pi}|^2 d\Omega_\pi}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{P}| M}{2(2\pi)^3} \right]_{P^2/M = E_0 + k_0 - \omega_\pi - (\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})^2/4M}}{2\pi \left[\frac{|\boldsymbol{\pi}| \omega_\pi}{(2\pi)^3} \sum_f |\mathcal{L}_{if}|^2 d\Omega_\pi \right]_{|\boldsymbol{\pi}| k_0 \cos \theta = M(\omega_\pi - k_0) + k_0 \omega_\pi - \mu^2/2}}$$

l'integrazione rispetto a $|\boldsymbol{\pi}|$ a numeratore essendo, come abbiamo detto, estesa per ciascun θ ai valori di $|\boldsymbol{\pi}|$ tali che la disuguaglianza:

$$(34) \quad k_0 + E_0 - \omega_\pi - \frac{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\pi})^2}{4M} \geq 0,$$

sia soddisfatta: abbiamo inoltre affisso la grandezza $\sum_f |\mathcal{P}_{if}|^2$ di un suffisso γ a ricordare la sua dipendenza da tale parametro.

Supporremo ora che sia:

$$(35) \quad T^{(1)} = \hat{T}^{(2)} = T,$$

ed inoltre supporremo che T dipenda poco dalla direzione del moto relativo finale dei nucleoni caratterizzata da \mathbf{P} .

Se le ipotesi testè dette sono verificate il rapporto $\mathcal{R}_{De; \gamma/H}$ può risciversi

sotto la forma:

$$(36) \quad \mathcal{R}_{De; \gamma/H} = \frac{2\pi \int d|\pi| |T|^2 \frac{|\pi|^2 d\Omega_\pi}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{|\mathbf{P}| M}{2(2\pi)^3} \int d\Omega_P \left[a^2 \left(\mathbf{P} + \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) + \right. \right.}{2\pi \left[\frac{|\pi| \omega_\pi}{(2\pi)^3} |L|^2 d\Omega_\pi \right]_{|\pi| k_0 \cos \theta = \dots}} \\ \left. \left. + a^2 \left(\mathbf{P} - \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) - 2 \left[\frac{2}{3} \gamma^2 + \frac{1}{3} \right] a \left(\mathbf{P} + \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) a \left(\mathbf{P} - \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) \right\}_{P^2/M = \dots}}{\text{stesso denominatore}},$$

dove abbiamo nella (36) posto in accordo con le (19) ... (24):

$$\sum_f |\mathcal{E}_{if}|^2 = \frac{2\varepsilon^2 |L|^2 + 2(1 - \varepsilon^2) |L|^2}{2} = |L|^2.$$

Come si vede tutto è a questo punto ridotto alla discussione della funzione:

$$(37) \quad F_\gamma(|\pi|, \theta) = \frac{|\pi| |\pi|^2 |\mathbf{P}| M}{2 \cdot (2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \psi d\psi \left[a^2 \left(\mathbf{P} + \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) + \right. \\ \left. + a^2 \left(\mathbf{P} - \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) - 2 \left[\frac{2}{3} \gamma^2 + \frac{1}{3} \right] a \left(\mathbf{P} + \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) a \left(\mathbf{P} - \frac{\pi - \mathbf{k}}{2} \right) \right]_{P^2/M = \dots} \\ = \left\{ \frac{\alpha |\mathbf{P}| M}{\pi} \left[\frac{2}{G^4 - u^2 P^2} - \frac{\frac{2}{3} \gamma^2 + \frac{1}{3}}{G^2 u |\mathbf{P}|} \log_{\frac{G^2 + u |\mathbf{P}|}{G^2 - u |\mathbf{P}|}} \right] \right\}_{P^2/M = \dots},$$

avendo posto per brevità:

$$u = |\mathbf{k} - \pi| \quad G^2 = \left[\alpha^2 + P^2 + \frac{u^2}{4} \right]_{P^2/M = \dots}$$

e avendo introdotto nell'integrazione rispetto a $d\Omega_\pi$ (a mezzo angolo solido) l'angolo ψ tra la direzione di \mathbf{P} e quella di $\pi - \mathbf{k}$.

Dalla (37) risulta intanto immediatamente che, come naturalmente deve essere, è:

$$\frac{F_1(|\pi|, \theta)}{|\pi|} = 0 \quad \text{per} \quad \mathbf{P} = 0.$$

Posto: $k_0 = 300 \text{ MeV}$, $\mu = 150 \text{ MeV}$, $\alpha^2 = 20,2 \text{ (MeV)}^2$ si è tabulato la $F_\gamma(|\pi|, \theta)$ per i valori estremi di $\gamma^2 = 0$ ed 1 e per vari valori di θ in funzione di $|\pi|$.

Il comportamento della $F_\gamma(|\pi|, \theta)$ è il seguente: per θ sufficientemente piccoli, fino a $\sim 20^\circ$ la F_γ ha per un γ qualsiasi un massimo *assai acuto* in corrispondenza del valore di $|\pi|$ che, per ciascun θ secondo la (32) si avrebbe

se il nucleone che dà luogo all'emissione del mesone fosse libero ed inizialmente in quiete; al crescere di θ la F_γ , sempre qualunque sia γ continua a presentare un siffatto massimo, che però si va man mano appiattendosi al crescere di θ . A titolo di esemplificazione, nelle due figg. 1 e 2 abbiamo riportato la $F_\gamma(|\pi|, \theta)$ per i valori $\theta = 8^\circ$ e 90° ed in corrispondenza di ciascuno di questi angoli per i valori estremi di γ , 0 ed 1.

Quanto ora detto circa la F_γ consente di scrivere il rapporto (36) sotto la forma:

$$(38) \quad \mathcal{R}_{De; \gamma/H} = \frac{|T|^{2*}}{|L|^{2*}} \frac{\int F_\gamma(|\pi|, \theta) d|\pi|}{|\pi|^* \omega_\pi^*}$$

almeno per gli angoli più prossimi a 0° . Nella (38) l'* sta ad indicare che la grandezza in questione deve essere calcolata per ciascun θ in corrispondenza del $|\pi|$ dato dalla (32). Abbiamo detto «almeno per gli angoli più prossimi a 0° » in quanto è per questi angoli che la F_γ ha quell'andamento quasi-deltiforme rappresentato in fig. 1.

Sebbene in $|T|^{2*}$ compaia in qualche modo l'effetto del legame noi faremo a questo punto l'ipotesi che sia:

$$(39) \quad \frac{|T|^{2*}}{|L|^{2*}} = 1.$$

Quest'ipotesi è probabilmente la più insoddisfacente di tutte quelle sinora fatte; è presumibile tuttavia che non si allontani troppo dalla realtà.

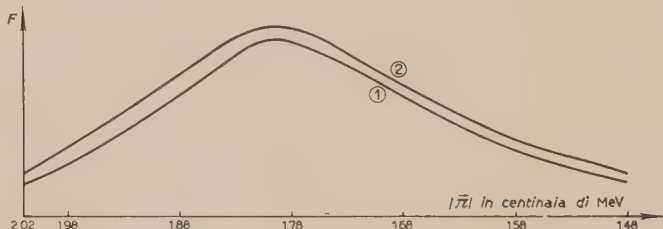


Fig. 2. - Curva (1) = $F_1(|\pi|, 90^\circ)$; Curva (2) = $F_0(|\pi|, 90^\circ)$.

N.B. La scala delle ordinate è arbitraria ed è la stessa per entrambe le curve.

Presa la (39) per buona si può costruire la seguente tabella: ci siamo limitati ai due valori estremi di γ , 0 ed 1.

TABELLA I.

I —	0°	8°	15°	25°	60°	90°	120°	150°	180°
$\mathcal{R}_{De; 1/H}$	0,11	0,15	0,22	0,34	0,49	0,54	0,44	0,37	0,35
$\mathcal{R}_{De; 0/H}$	0,65	0,65	0,65	0,65	0,62	0,6	0,5	0,44	0,4

Discussione.

Scopo del presente lavoro è stato quello di vedere che previsioni si potessero fare circa l'effetto del principio di Pauli sulla fotoproduzione di mesoni nel deuterio, facendo ipotesi semplificative estreme sugli elementi di matrice del processo. Tali ipotesi sono racchiuse anzitutto nelle (19), (20) ... (24), poi nella (37), infine nella (39). Il risultato finale dipende da un unico parametro γ^2 , la probabilità che lo spin di uno dei nucleoni non si rovesci durante il processo. La tabella I riassume i risultati; il fatto che le cifre della seconda riga di detta tabella, corrispondenti a probabilità 1 di rovesciamento, differiscano dall'unità è dovuto (7) principalmente agli effetti diretti del legame.

Esperienze sul problema qui trattato sarebbero augurabili; i risultati potrebbero essere confrontati con quelli delle esperienze di PANOFSKY e coll. (8) (9): com'è noto tali esperienze mostrano che il rapporto tra la probabilità di cattura non radiativa e la probabilità di cattura radiativa di mesoni π in deuterio è 7/3, ciò che sembra necessariamente implicare una forte probabilità di assorbimento con rovesciamento dello spin.

Calcoli analoghi a quelli ora svolti potrebbero essere eseguiti per il Tritio. Nel Tritio l'effetto del principio di Pauli dovrebbe essere ancora maggiore a causa della minore distanza tra i nucleoni.

Riguardo alla questione del rapporto positivi-negativi va senza dire che un calcolo del tipo di quello ora svolto non può dare nessuna informazione al riguardo.

(7) Vedasi a questo proposito per i nuclei pesanti: M. LAX e H. FESHBACH: *Phys. Rev.* **81**, 189, (1951).

(8) W. M. PANOFSKY, R. L. AAMODT e J. HADLEY: *Phys. Rev.*, **81**, 565 (1951).

(9) K. BRUECKNER, R. SERBER e K. WATSON: *Phys. Rev.*, **81**, 575 (1951).

Desidero anzitutto ringraziare vivamente gli amici M. CINI ed L. A. RADICATI che hanno attivamente collaborato nella fase iniziale della presente ricerca.

Al prof. B. FERRETTI sono debitore per alcune utili discussioni.

Infine all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che ringrazio nella persona del suo Direttore prof. M. PICONE, è dovuta l'esecuzione della maggior parte dei calcoli numerici, senza la quale il presente lavoro non avrebbe potuto essere condotto a termine.

SUMMARY

The effect of binding and particularly of Pauli's principle in the photoproduction of mesons in Deuterium has been studied in a way which is independent from a detailed meson theory. This is possible considering not the total cross-section, but only the ratio between the cross-section for photoproduction in Deuterium and Hydrogen. As is shown in the table page 567 (for photons of 300 MeV) Pauli's principle considerably reduces the cross section for photoproduction at small angles (down to $\sim 25^\circ$) if the probability γ^2 that the spin of one of the nucleons is not flipped during the process is 1. On the contrary the effect of Pauli's principle is unimportant if the probability of flipping is 1. One can hope on the basis of these results that the experience might decide between a large or small probability of flipping, so confirming the results of PANOFKY and cow. on the non radiative absorption of mesons in Deuterium.

Mezzi dispersivi che non presentano l'effetto Fizeau-Fresnel.

N. CARRARA

Centro di studio per la Fisica delle Microonde - Firenze

(ricevuto il 22 Maggio 1951)

Riassunto. — In alcuni mezzi dispersivi, le onde elettromagnetiche si propagano in tal modo che il prodotto della velocità di fase e della velocità di gruppo è eguale al quadrato della velocità della luce. Si dimostra che per questi mezzi il trascinamento parziale è nullo, che l'esperimento di Michelson-Morley dovrebbe dare risultato nullo. Dovrebbe dunque essere impossibile determinare, con esperimenti di questa specie, il moto di un sistema di riferimento rispetto al mezzo.

1. — Premessa.

Un fascio di onde piane, monocromatiche, di qualsiasi natura (in particolare, un fascio di onde elettromagnetiche), che si propagano in un mezzo dispersivo, in una certa direzione, lungo la quale si disponga un asse delle ascisse x , può essere espresso dalla seguente equazione:

$$(1) \quad y = A \exp [j2\pi(\nu t - ax)],$$

dove A è l'ampiezza, ν la frequenza, a la costante di propagazione, che è eguale all'inverso della lunghezza d'onda λ , se il mezzo, come supporremo, non è assorbente.

Il fascio si propaga con una velocità di fase, data da:

$$(2) \quad V = \nu \lambda,$$

e con una velocità di gruppo, generalmente diversa da V perchè il mezzo è supposto dispersivo, espressa da:

$$(3) \quad U = \frac{d\nu}{da};$$

e. dalla (2) e dalla (3), si deduce subito che:

$$(4) \quad \frac{1}{U} = \frac{1}{V} + v \frac{d}{dv} \frac{1}{V}.$$

Ci proponiamo di dimostrare che nei mezzi, per i quali vale la relazione:

$$(5) \quad UV = c^2,$$

dove c è la velocità della luce nello spazio vuoto illimitato, l'effetto di Fizeau-Fresnel, cioè il così detto trascinamento parziale, è nullo. In tali mezzi anche l'esperimento di Michelson e Morley darebbe risultato nullo; e, in generale, similmente a quanto avviene per lo spazio vuoto illimitato, sarebbe impossibile, con esperienze sulla propagazione delle onde elettromagnetiche, mettere in evidenza il moto, rispetto ad uno di tali mezzi, del sistema di riferimento in cui le esperienze stesse sarebbero compiute ⁽¹⁾.

Riconosceremo infatti che per tali mezzi l'indice di rifrazione e le velocità di fase e di gruppo, dipendono soltanto dalla frequenza delle onde, oltre che da una costante k caratteristica del mezzo; e che le leggi, che esprimono la dipendenza di tali grandezze dalla frequenza, rimangono invariate in tutti i sistemi di riferimento in moto reciproco traslatorio uniforme, purchè k sia invariante.

In conseguenza, una sorgente, immersa in un mezzo avente le proprietà indicate, ed immobile rispetto ad un sistema di riferimento S , irradia nei due versi di una direzione prefissata, per esempio quella dell'asse x , onde che si propagano con velocità di fase di egual modulo (velocità valutate rispetto ad S); similmente un'altra sorgente, mobile in S con una certa velocità, per esempio lungo l'asse x , irradia nei due versi del medesimo asse onde, che, pure presentando rispetto ad S frequenze diverse fra loro e da quella della sorgente (effetto Doppler) e velocità di fase diversa, hanno, in un sistema di riferimento S_0 , fisso alla sorgente (e quindi mobile rispetto ad S), frequenze eguali fra loro ed a quella della sorgente e velocità di fase di egual modulo. Inoltre, se la sorgente fissa in S_0 presenta in S_0 frequenza eguale a quella che l'altra manifestava in S , le velocità delle onde in S sono eguali a quelle delle onde in S_0 .

In altre parole, si ottengono i medesimi risultati, nelle determinazioni sperimentali degli indici di rifrazione e delle velocità delle onde, sia nel sistema S sia nel sistema S_0 . Ciò permette di affermare appunto l'impossibilità di rico-

⁽¹⁾ Tale proprietà è stata studiata da R. W. DITCHBURN: *Revue d'Optique*, 27, 4 (1948), limitatamente al caso in cui la velocità del sistema di riferimento sia piccola in confronto a c e ad U . Tali limitazioni, come mostreremo in seguito, non sono necessarie.

noscere, con esperienze del genere, il moto di un sistema di riferimento rispetto al mezzo, altrimenti i risultati delle determinazioni nei due sistemi, che si muovono l'uno rispetto all'altro (e quindi se uno potesse dirsi fisso rispetto al mezzo, l'altro sarebbe certamente mobile rispetto al mezzo stesso) non potrebbero essere eguali.

L'argomento è di notevole interesse, in quanto esistono *mezzi*, in cui la propagazione avviene praticamente in modo conforme alla (5); tali sono, ad esempio, gli interspazi vuoti fra lamine piane parallele, perfettamente conduttrici, le guide d'onda vuote, con pareti perfettamente conduttrici, e sotto alcune condizioni, la ionosfera ⁽²⁾.

2. - Indice di rifrazione, velocità di fase e di gruppo nei mezzi che soddisfano la (5); frequenza critica.

Fissato un sistema di riferimento S , rispetto al quale si intendono valutare le velocità V ed U , per definizione, l'indice di rifrazione rispetto ad S è dato da:

$$(6) \quad n = \frac{c}{V}.$$

Se è valida la (5), si può anche scrivere:

$$(7) \quad n = \frac{U}{c},$$

e quindi dalla (4):

$$(8) \quad n = \frac{1}{n + v \frac{dn}{dv}},$$

cioè:

$$(9) \quad n^2 + n v \frac{dn}{dv} = 1.$$

Da questa si ricava subito:

$$(10) \quad n = \sqrt{1 - \frac{k}{v^2}},$$

dove k è una costante positiva, se $V > c$, come accade appunto nei mezzi ricordati nel numero precedente.

⁽²⁾ N. CARRARA: *Nuovo Cimento*, 5, 5 (1948).

Ad esempio, per le guide d'onda rettangolari è:

$$(11) \quad k = c^2 \left[\left(\frac{n}{2a} \right)^2 + \left(\frac{m}{2b} \right)^2 \right],$$

dove n, m sono numeri interi, che caratterizzano il modo di propagazione, ed a, b , sono le dimensioni della sezione retta della guida.

Dalla (10), dalla (6) e dalla (7) segue:

$$(12) \quad V = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k}{v^2}}}, \quad U = c \sqrt{1 - \frac{k}{v^2}}.$$

Le relazioni precedenti, che sono state scritte per il sistema di riferimento S , mantengono la stessa forma in qualsiasi altro sistema di riferimento S_0 , mobile con qualunque velocità $v < c$, in direzione di V , quando k sia invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Infatti, se in S vale la (5), in S_0 vale la relazione analoga:

$$(5') \quad U_0 V_0 = c^2,$$

dove con U_0 e con V_0 si sono indicate le velocità di gruppo e di fase del fascio rispetto al nuovo sistema. Ciò segue dal fatto che fra $V, V_0; U, U_0$ valgono le formule relativistiche di trasformazione delle velocità:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V_0^+ = \frac{V - v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}, & V_0^- = \frac{V + v}{1 + \frac{Vv}{c^2}}, \\ U_0^+ = \frac{U - v}{1 - \frac{Uv}{c^2}}, & U_0^- = \frac{U + v}{1 + \frac{Uv}{c^2}}, \end{array} \right.$$

alle quali si possono aggiungere quelle che danno la trasformazione della frequenza, passando da S ad S_0 :

$$(14) \quad v_0^+ = v \frac{1 - \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad v_0^- = v \frac{1 + \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

(Nelle (13), (14) l'apice $+$ significa che v è concorde con V e con U , e il segno $-$ che v è invece discorde). Moltiplicando membro a membro le espressioni (13) di V_0 e U_0 si ottiene immediatamente la (5).

Ma nel nuovo sistema si possono trascrivere, con notazioni evidenti, le

formule di definizione:

$$(6') \quad n_0 = \frac{c}{V_0} = \frac{U_0}{c},$$

$$(4') \quad \frac{1}{U_0} = \frac{1}{V_0} + v_0 \frac{d}{dv_0} \frac{1}{V_0},$$

da cui discende, quando k è invariante, come accade per le guide d'onda:

$$(10') \quad n_0 = \sqrt{1 - \frac{k}{v_0^2}},$$

$$(12') \quad V_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k}{v_0^2}}}, \quad U_0 = c \sqrt{1 - \frac{k}{v_0^2}},$$

e quindi, come avevamo avvertito nella premessa, *il modo di variare dell'indice di rifrazione, della velocità di fase e della velocità di gruppo, in funzione della frequenza, è il medesimo, tanto nel sistema S quanto nel sistema S_0 .*

Le (12') si possono anche dedurre per altra via. Infatti: dalla prima delle (12) si ricava:

$$(15) \quad \frac{k}{v^2} = 1 - \left(\frac{c}{V} \right)^2,$$

da cui, tenendo conto, per esempio, della prima delle (14), si ottiene:

$$(v_0^+)^2 = \frac{k \left(1 - \frac{v}{V} \right)^2}{1 - \left(\frac{c}{V} \right)^2 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2},$$

che si può così trasformare:

$$\sqrt{1 - \frac{k}{(v_0^+)^2}} = c \frac{1 - \frac{Vv}{c^2}}{V - v},$$

e da questa si deduce subito:

$$(16) \quad V_0^+ = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k}{(v_0^+)^2}}}, \quad U_0^+ = c \sqrt{1 - \frac{k}{(v_0^+)^2}};$$

similmente si ricava:

$$(17) \quad V_0^- = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k}{(v_0^-)^2}}}, \quad U_0^- = c \sqrt{1 - \frac{k}{(v_0^-)^2}}.$$

Le (16) e le (17) coincidono ovviamente con le (12'), nello scrivere le quali non è stato necessario distinguere se v e V avessero versi concordi o no.

Dalla (10), (12) risulta che quando V assume il valore critico:

$$(18) \quad v_c = \sqrt{k},$$

l'indice di rifrazione è nullo, V è infinita, U nulla, e che per $v < v_c$ tutte queste grandezze sono immaginarie; il mezzo dispersivo che soddisfa la (5) si comporta dunque come un filtro passa alto.

Un fascio di onde, che si propaga in S con frequenza $\nu > v_c$ e con velocità V , presenta in S , la cui velocità v si suppone concorde con V , la frequenza ν_0^+ data dalla (14). Se è $v = U$, si ha:

$$(19) \quad \nu_0^+ = \nu \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = v_c,$$

cioè la frequenza del fascio coincide in S_0 (per $v = U$) con la frequenza critica, che è per la (18) una costante caratteristica del mezzo.

3. - Sorgenti fisse e sorgenti mobili in un mezzo dispersivo.

Sia dato un mezzo dispersivo isotropo *qualunque*. Scelto un sistema di riferimento S fisso al mezzo, una sorgente fissa al sistema, e quindi al mezzo, irradia onde in tutte le direzioni, la cui frequenza ν valutata in S è eguale a quella della sorgente $\bar{\nu}$; esse si propagano in tutte le direzioni con eguale velocità, perchè il mezzo è supposto isotropo; in particolare saranno eguali in modulo le velocità delle onde nei due sensi di una direzione qualunque, che assumeremo come asse x del sistema.

Osservando la sorgente da un sistema di riferimento S_0 , mobile rispetto ad S lungo l'asse x con velocità v , la frequenza della sorgente appare ν_0 diversa da ν . Infatti fra i due corrispondenti periodi $T_0 = 1/\nu_0$, $T = 1/\bar{\nu}$ deve intercedere la nota dilatazione relativistica dei tempi e quindi

$$(20) \quad \bar{\nu}_0 = \bar{\nu} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

La sorgente emette onde che, nei due versi dell'asse x , presentano rispetto ad S , come abbiamo visto, frequenze eguali fra loro e a quella della sorgente $\nu = \bar{\nu}$; le medesime onde presentano invece in S_0 frequenze ν_0^+ , ν_0^- date dalle (14), diverse fra loro e da quella della sorgente (effetto Doppler); anche le velocità di fase V_0^+ , V_0^- , date dalle (13) sono diverse.

Se ora prendiamo in considerazione un'altra sorgente, che sia fissa rispetto ad S_0 , le onde che essa irradia nei due versi dell'asse x , pur avendo rispetto ad S_0 frequenze eguali fra loro e a quella della sorgente, non hanno velocità di fase

(sempre valutate rispetto ad S_0) di egual modulo (trascinamento), perchè S_0 si muove rispetto al mezzo nella direzione delle onde, a meno che il mezzo non soddisfi alla (5) e sia caratterizzato da una costante k invariante relativisticamente.

In questo caso infatti per le (12') le velocità di fase dipendono solo dalla frequenza, e quindi, essendo eguali le frequenze delle onde che si propagano nei due versi dell'asse x , sono eguali anche le corrispondenti velocità di fase.

Si può dunque concludere che le onde irradiate in un mezzo che soddisfa la (5), con k invariante, da una sorgente fissa in un dato sistema di riferimento, presentano rispetto a quel sistema la medesima velocità nei due versi dell'asse x , qualunque sia la velocità del sistema stesso lungo l'asse x rispetto al mezzo; il che equivale a dire che è impossibile riconoscere, con determinazioni di tal genere, se il sistema sia mobile rispetto al mezzo oppure no.

In particolare gli esperimenti di FIZEAU-FRESNEL (trascinamento parziale) e di MICHELSON-MORLEY debbono dare risultato nullo in qualunque sistema vengano compiuti, purchè il mezzo soddisfi alle condizioni più volte indicate.

Non si può allora riconoscere alcun sistema che possa dirsi fisso rispetto al mezzo, così che il mezzo non costituisce un sistema di riferimento privilegiato.

Che il risultato dell'esperimento di FIZEAU-FRESNEL sia nullo, lo si può dedurre anche dalla formula di Zeemann che dà il trascinamento parziale:

$$(21) \quad \Delta V = v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{v}{n} \frac{dn}{dv} \right).$$

Infatti, quando n dipende da v , com'è indicato dalla (10), la (8) è soddisfatta e quindi $\Delta V = 0$.

4. — Onde stazionarie, battimenti.

Si abbiano due fasci di onde monocromatiche, che si propagano in un mezzo dispersivo qualunque nella stessa direzione, ma in verso opposto; inoltre in un sistema di riferimento S le frequenze dei due fasci siano eguali e le velocità di fase abbiano egual modulo. Ovviamente la sovrapposizione dei due fasci dà luogo in S alla formazione di onde stazionarie. In un sistema S_0 , che si muova rispetto ad S con velocità v nella direzione delle onde, le velocità V_0^+ , V_0^- , e le frequenze ν_0^+ , ν_0^- , date dalle (13), (11), appaiono diverse. Osserviamo che tali velocità e frequenze debbono intendersi determinate da osservatori fissi in S_0 ; se si trattasse di onde elettromagnetiche, che si propagano in una guida d'onda, tali grandezze potrebbero essere opportunamente rilevate con sonde, inserite nella guida, pur esse fisse in S_0 . Evidentemente in S_0 non si avranno più onde stazionarie, ma solo battimenti.

Una sonda, fissata in S , rileverebbe, per gli osservatori fissi in S , la frequenza ν comune ai due fasci; ma la medesima sonda non rileverebbe agli osservatori fissi in S_0 nè la frequenza ν nè le frequenze ν_0^+ , ν_0^- ; l'uno o l'altro dei due fasci ecciterebbe in essa una corrente oscillante di frequenza

$$(22) \quad \nu_0 = \nu \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

corrispondentemente al fatto che fra i due periodi T_0 e T deve intercedere la dilatazione relativistica dei tempi.

Prendiamo infatti in considerazione il fascio che si propaga in verso concorde con v ; rispetto ad S_0 la sonda fissata ad S appare dotata della velocità $-v$. L'intervallo di tempo, che separa in S_0 il passaggio per la sonda di due massimi del campo elettromagnetico, sarebbe manifestamente $1/\nu_0^+$, se la sonda fosse ferma in S_0 ; poichè invece essa si muove con velocità $-v$, tale intervallo diventa $1/\bar{\nu}_0^+$.

Infatti è:

$$(23) \quad \frac{V_0^+ + v}{\bar{\nu}_0^+} = \frac{V_0^+}{\nu_0^+},$$

e da questa, tenendo conto delle (13), discende subito la (22).

Pertanto, se la sonda è situata in S in un ventre delle onde stazionarie, cioè in un punto in cui i due fasci si sovrappongono in concordanza di fase, tale concordanza rimane ancora per gli osservatori in S_0 qualora si riferiscano, alla medesima sonda solidale con S ; i due fasci, esplorati con una simile sonda, presentano dunque, sovrapponendosi, onde stazionarie anche in S_0 .

SUMMARY

There are dispersive media in which electromagnetic waves propagate in such a way that the product of phase and group velocities equals the square of the velocity of light. It can be shown that for these media the partial convection is zero, that the Michelson-Morley experiment would give a negative result and that it would be impossible to determine with experiments of that kind the movement of whatsoever reference system with respect to the media.

Un metodo generale di analisi spettrografica quantitativa.

CARLA BERSANO

*Istituto di Chimica Industriale dell'Università - Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R.
Milano*

(ricevuto il 15 Maggio 1951)

Riassunto. — In questa nota viene stabilito un nuovo metodo di lavoro per la determinazione quantitativa di un elemento, mediante analisi spettrografica, che presenta, sui finora usati, una maggiore generalità e semplicità.

Eseguendo spettrogrammi di miscele contenenti, tra eventuali altri, due elementi A e B le cui concentrazioni indicheremo con C e con K , le righe a, a', a'', \dots di A e le righe b, b', b'', \dots di B appariranno più o meno intense a seconda delle condizioni dell'esperienza, del materiale fotografico usato, della tecnica messa in opera e dei valori di C e di K . Questo è il fondamento ben noto della spettrografia quantitativa.

Tenendo costante la concentrazione K dell'elemento B apparirebbe evidente, che, a parità di tutte le altre condizioni, l'annerimento delle righe b e b' di B dovesse essere eguale in tutti i fotogrammi. Ciò invece non accade neppure per spettrogrammi eseguiti su due parti vicine di una stessa lastra in quanto, i metodi spettrografici essendo sensibilissimi, bastano minime variazioni delle condizioni di eccitazione (quali ad esempio piccole differenze nella tensione applicata o nella sua frequenza, piccole differenze di conduttività dell'aria interposta tra gli elettrodi, ecc.) a mutare le condizioni della emissione e quindi quelle dell'annerimento della lastra.

Fortunatamente si è potuto trovare una funzione degli annerimenti delle righe di A e di quelle di B che è invariante rispetto a tutte le condizioni sperimentali e che quindi permette di determinare la concentrazione C quando sia nota la concentrazione K .

La ricerca di questa funzione, fondamentale per la spettrografia quantitativa, ha formato oggetto di molti studi e ad essa si è giunti si può dire gradualmente attraverso una lunga serie di « metodi di lavoro » i quali, sostanzialmente, si possono tutti ricondurre alle considerazioni analitiche che seguono. Da esse si trae inoltre un nuovo metodo di lavoro che si è mostrato più semplice e più rapido di quelli finora in uso.

Consideriamo dunque una miscela in cui l'elemento A abbia una concentrazione C da determinare e l'elemento B una concentrazione K nota. Eseguito uno spettrogramma di tale miscela, si misurino le deviazioni galvanometriche dello spettrofotometro relative alla riga a dell'elemento A e a due diverse righe b e b' dell'elemento B . Indicheremo con:

G_{aC} la deviazione dovuta alla riga a quando la concentrazione di A sia eguale a C ;

G_b la deviazione dovuta alla riga b di B (concentrazione di B sempre eguale a K);

$G_{b'}$ la deviazione dovuta alla riga b' di B ;

g_{aC} , g_b , $g_{b'}$, i rispettivi logaritmi.

Come è evidente, facendo variare con continuità la concentrazione di A nella miscela, ad esempio facendola crescere da zero a valori sempre maggiori, l'annerimento di a diverrà sempre più intenso almeno rispetto agli annerimenti delle righe b e b' provenienti dall'elemento B la cui concentrazione K è costante. Vi sarà pertanto una concentrazione E di A per cui l'annerimento di a sarà eguale a quello di b , e un'altra concentrazione F , sempre di A , per cui l'annerimento di a sarà eguale a quello di b' . Analiticamente queste due condizioni si traducono nelle due relazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} G_{aE} = G_b \\ G_{aF} = G_{b'} \end{cases}$$

Le due righe a e b si dicono *omologhe* alla concentrazione E ; le due righe a e b' si dicono *omologhe* alla concentrazione F .

Come dimostreremo in seguito, e come d'altronde è già noto, questo eguale annerimento è una proprietà invariante nel senso che alle concentrazioni E e K (F e K rispettivamente) le righe a e b (a e b' rispettivamente) hanno sempre eguali annerimenti quali si siano le condizioni sperimentali e il materiale fotografico adoperato.

Su questo concetto di *righe homologhe*, dovuto a GERLACH e a SCHWEITZER, sono fondati molti metodi di analisi spettrografica quantitativa. Essi sono

estremamente precisi ma di uso talora laborioso a causa della necessità di molti campioni esattamente tarati e della precisa determinazione delle concentrazioni E ed F relative a molte coppie di righe. Il metodo di lavoro che qui esponiamo prescinde da questa determinazione.

Ciò posto, stabiliamo un sistema di coordinate le cui ascisse x siano i logaritmi della concentrazione C di A :

$$(2) \quad x = \log C,$$

e le cui ordinate y abbiano una scala qualunque avente come origine la intersezione dei due assi ortogonali. Porremo inoltre

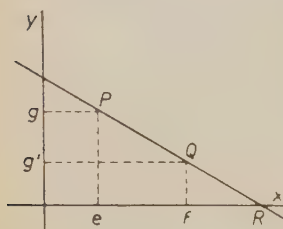


Fig. 1.

le seguenti notazioni:

$$(3) \quad e = \log C; \quad g = g_a - g_b; \quad g' = g_a - g_{b'}; \quad e = \log E; \quad f = \log F.$$

Consideriamo (fig. 1) i due punti $P(e, g)$ e $Q(f, g')$ e la intersezione R della retta PQ con l'asse delle ascisse. Indicheremo con r l'ascissa di R . Dimostriamo che:

- 1) r, e, f sono indipendenti dalla caratteristica γ della lastra usata;
- 2) $r = \log C$.

Ricordiamo per questo la relazione di Anders che lega la concentrazione C di un elemento con la corrispondente intensità della radiazione emessa dall'atomo dell'elemento stesso opportunamente eccitato; essa, sotto forma differenziale, può essere scritta:

$$(4) \quad C di = \alpha i dC,$$

dove il coefficiente di esposizione α dipende dalle caratteristiche di eccitazione e dalla frequenza dell'onda monocromatica emessa.

Integrando la (4) e tenendo conto della relazione che lega i con l'annerimento della lastra e con la deviazione G del galvanometro, si trae la seguente relazione tra C e G :

$$(5) \quad G = (HC)^{-\Gamma},$$

dove H è una costante di integrazione che non occorre determinare e $\Gamma = \gamma\alpha$ essendo γ la caratteristica della lastra.

Notiamo che la (5) è valida soltanto operando nel tratto rettilineo della caratteristica ossia nel tratto in cui la caratteristica γ si mantiene costante; d'altronde in tutti i metodi di lavoro spettrografico quantitativo occorre operare in questo campo a meno di ricorrere a complicati diagrammi di confronto.

Scriviamo la (5) una volta per le concentrazioni E ed F dell'elemento A e per la sua riga a , e una volta per la concentrazione K dell'elemento B e per le sue due righe b e b' .

Troviamo

$$\begin{aligned} G_{aE} &= (H_a E)^{-\Gamma}; & G_b &= (H_b K)^{-\Gamma} \\ G_{aF} &= (H_a F)^{-\Gamma}; & G_{b'} &= (H_{b'} K)^{-\Gamma}. \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro ogni riga e ricordando le (1) si ha

$$(6) \quad E = \frac{H_b K}{H_a}, \quad F = \frac{H_{b'} K}{H_a},$$

che confermano essere e ed f indipendenti da γ come è d'altronde evidente dal loro significato fisico.

Per la dimostrazione della seconda parte basta calcolare le coordinate di R . Abbiamo così:

equazione della retta PQ :

$$\frac{y - g}{g' - g} = \frac{x - e}{f - e};$$

ascissa della sua intersezione con l'asse delle x :

$$(7) \quad r = \frac{eg' - fg}{g' - g}.$$

Il valore di detta ascissa si ottiene sostituendo ad e, f, g, g' i loro valori precedentemente determinati dalle (3), (4), (6):

$$g = g_a - g_b = -\Gamma \log \frac{H_a C}{H_b K}; \quad e = \log \frac{H_b K}{H_a};$$

$$g' = g_a - g_{b'} = -\Gamma \log \frac{H_a C}{H_{b'} K}; \quad f = \log \frac{H_{b'} K}{H_a}.$$

Si ottiene subito:

$$r = \frac{-\Gamma \log \frac{H_b K}{H_a} \log \frac{H_a C}{H_{b'} K} + \Gamma \log \frac{H_{b'} K}{H_a} \log \frac{H_a C}{H_b K}}{\Gamma \log \frac{H_{b'}}{H_b}},$$

che, in virtù della immediata eliminazione di Γ , mostra essere r indipendente da tale fattore.

Proseguendo nel facile calcolo si raccolga dovunque a fattore comune $\log C$: si ottiene:

$$r = \log C + \frac{1}{\log \frac{H_{b'}}{H_b}} \left(\log \frac{H_{b'} K}{H_a} \log \frac{H_b K}{H_a} - \log \frac{H_{b'} K}{H_a} \log \frac{H_b K}{H_a} \right),$$

ossia, come volevasi dimostrare,

$$r = \log C,$$

essendo il termine tra () evidentemente nullo.

I primi ad accorgersi che le rette del tipo PQ incontrano l'asse delle concentrazioni in un punto la cui ascissa è indipendente dal γ della lastra usata, furono alcuni ricercatori inglesi facenti capo alla British Cast Iron Research Association (1).

I loro lavori hanno un complesso svolgimento geometrico tendente a dimostrare che $r = \log C$, attraverso il parallelismo di un insieme di rette, che, con le approssimazioni sperimentali si verifica sempre, ma che non è indispensabile alla dimostrazione dell'asserto.

Il fatto che le rette $x = e$; $x = f$ che qui vengono usate e che sono le stesse usate dagli Autori citati, corrispondano a quelle concentrazioni E ed F per cui sono rispettivamente omologhe le righe a, b ed a, b' collega tali lavori con il metodo classico delle righe omologhe e con tutte le sue ben note deriva-

(1) C. J. SANDERS: *Soc. Chem. Ind.*, **67**, 185 (1948); A. ARGYLE e W. J. PRICE: *Soc. Chem. Ind.*, **67**, 187 (1948).

zioni. Tutti questi metodi possono facilmente derivarsi dalle considerazioni e dalle formule su esposte come casi particolari di esse.

Naturalmente è anche possibile usare una sola delle due righe b e b' sostituendo alla lettura di una riga la lettura dell'altra munita di opportuno schermo.

Dalle considerazioni precedenti nasce un nuovo metodo di determinazione spettrografica quantitativa, che, pur basandosi sostanzialmente sul concetto delle righe omologhe, non costringe a usare campioni tarati in cui A abbia le concentrazioni stabilite E ed F relative alle varie coppie di righe a e b , ma che permette di usare campioni aventi concentrazioni arbitrarie.

Si scelga un elemento B che non sia contenuto, neppure in tracce, nei campioni che si dovranno analizzare e si scelgano due righe b e b' del suo spettro e una riga a dello spettro dell'elemento A da determinare. Queste righe devono essere, possibilmente, scelte in modo che siano abbastanza vicine tra loro; che siano nitide, che non siano disturbate da righe vicine relative ad altri elementi contenuti nel campione da analizzare; che i loro annerimenti non risultino nè troppo forti nè troppo deboli in tutto il campo delle concentrazioni in cui si dovrà lavorare, in modo da operare sempre nel campo corrispondente al tratto rettilineo della caratteristica della lastra fotografica ⁽²⁾; che siano comprese tra i 2000 e i 3000 Å, campo nel quale il γ della lastra è indipendente dalla lunghezza dell'onda ricevuta; infine che gli annerimenti di b e di b' siano sufficientemente diversi tra di loro.

Si prepari una ganga contenente almeno i principali elementi che saranno presenti nel materiale da analizzare e con essa si preparino due campioni: l'elemento B abbia in entrambi la stessa concentrazione K , mentre l'elemento A abbia in uno la concentrazione C_1 e nell'altro la concentrazione C_2 .

Si facciano ora un fotogramma del primo campione e uno del secondo e si misurino le deviazioni con la tecnica consueta.

Sostituendo i valori trovati nella (7) si ottengono le:

$$(8) \quad \begin{cases} c_1 = \log C_1 = \frac{g_1 f - g'_1 e}{g_1 - g'_1} , \\ c_2 = \log C_2 = \frac{g_2 f - g'_2 e}{g_2 - g'_2} , \end{cases}$$

dove le incognite sono ora rappresentate da e ed f che il sistema (8) permette di determinare.

Passando ora ai campioni da analizzare, ai quali fu fatta l'aggiunta dell'elemento B nella concentrazione K , si faccia di ciascuno uno spettrogramma; si pongano nella (7) al posto di e e di f i valori precedentemente trovati tramite le (8) e al posto di g e di g' i valori letti al fotometro; la (7) porge senz'altro il valore della concentrazione cercata.

Nonostante l'apparente complicazione dei calcoli preliminari, eliminando subito e ed f tra la (7) e le due (8), è facile istituire uno schema di calcolo che permetta anche l'applicazione del metodo dei minimi quadrati.

⁽²⁾ Per la determinazione del campo in cui γ resta costante ossia nel quale è lecito operare è esposto un metodo assai rapido in una mia nota in corso di pubblicazione negli *Atti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* (Maggio 1950).

Se, invece che per via analitica, si vuole procedere per via grafica, il metodo proposto assume delle caratteristiche di grande rapidità e di elevato rendimento, specialmente quando, come è il caso più comune nelle ricerche spettrografiche, si debbano fare ricerche sistematiche su lunghe serie di campioni provenienti da ricerche minerarie, da controlli di lavorazione, ecc.

In tale caso la via da seguire è la seguente. Si fissino due punti E ed F e si conducano per essi le perpendicolari EE' , FF' alla loro congiungente.

Dallo spettrogramma del primo campione tarato si determinino

$$g_1 = g_{aC_1} - g_{b_1} = \log G_{aC_1} - \log G_{b_1} = \log \frac{G_{aC_1}}{G_{b_1}},$$

$$g'_1 = g_{aC_1} - g_{b'_1} = \log G_{aC_1} - \log G_{b'_1} = \log \frac{G_{aC_1}}{G_{b'_1}},$$

e si portino, in una scala opportuna, g_1 sulla retta EE' e g'_1 sulla retta FF'

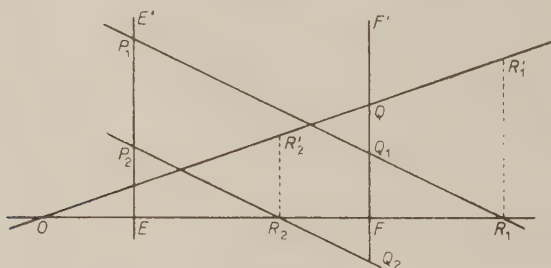


Fig. 2.

ottenendo così i due punti P_1 e Q_1 . La retta P_1Q_1 incontri la retta EF in un punto R_1 .

Analogamente (fig. 2) si faccia per il secondo campione tarato ottenendosi così la retta P_2Q_2 e il punto R_2 .

Dalle considerazioni precedenti risulta noto che, in un opportuno sistema di ascisse, sulla retta EF le ascisse di R_1 e di R_2 sono i logaritmi delle concentrazioni, note, C_1 e C_2 dei due campioni tarati. Conduciamo allora per O_1 ed R_2 le perpendicolari alla EF e portiamo su di esse, in una scala qualunque:

$$R_1R'_1 = \log C_1; \quad R_2R'_2 = \log C_2,$$

e congiungiamo R'_1 con R'_2 ; questa retta incontra la retta EF in un punto O che è l'origine delle ascisse su EF , la scala essendo determinata dalle posizioni:

$$OR_1 = \log C_1; \quad OR_2 = \log C_2.$$

Ove si voglia si possono anche calcolare i valori E ed F delle due concentrazioni di omologia, ma la cosa non è assolutamente necessaria, in quanto, una volta determinata la scala sulla retta EF , si ottiene immediatamente la concentrazione di un campione in esame operando su di esso come sui cam-

pioni tarati, disegnando la retta PQ ad esso relativa e misurando l'ascissa del punto R in cui tale retta PQ incontra la retta EF .

È bene tenere presente che, ove si operi in costanza delle condizioni sperimentali, con materiale fotografico uniforme e nel campo in cui la caratteristica della lastra è rettilinea, le rette del tipo PQ sono tutte tra loro sensibilmente parallele (parallelismo di Argyle e Price). Questa osservazione permette di eliminare dalle medie valori affetti da un probabile errore grossolano o derivanti da materiale fotografico imperfetto.

Ho applicato il suddetto metodo a un gruppo di determinazioni sistematiche della concentrazione del Germanio in blende e in calamine italiane. In tali ricerche il minerale fu addizionato con Tallio sotto forma di solfato in soluzione con la concentrazione costante del 3,2%. Come riga a del Germanio fu scelta la sua riga ultima 2651,18 Å; come righe del Tallio b e b' rispettivamente le due righe 2918,33 Å e 2921,53 Å che formano una doppietta ben distinta e in un campo libero da altre righe.

Ho notato la presenza del Germanio in quasi tutti i minerali di zinco italiani in concentrazioni fino al 0,02%.

I risultati ottenuti sono stati confermati, dopo un lungo controllo su campioni tarati, da analisi quantitative eseguite, fino dove possibile, con i metodi chimici classici e con altri metodi spettrografici.

Tali ricerche, per quanto riguarda un folto gruppo di minerali sardi, hanno avuto una indiretta convalida attraverso un diagramma mostrante le variazioni della concentrazione del Germanio nel filone.

SUMMARY (*).

In this paper the Author discusses a new working method for the quantitative determination of an element by spectrographic analysis, which in comparison with the methods used till now, offers greater generality and simplicity.

(*) Editor's care.

Sull'accoppiamento delle "scale di due" (*).

R. ASCOLI

Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico - Torino

(ricevuto il 29 Maggio 1951)

Riassunto. — Si suggerisce un tipo di accoppiamento tra « scale di due », vantaggioso per facilità di progetto e sicurezza di funzionamento superiore a quella degli altri tipi a resistenze e capacità.

Sono note le difficoltà di progettare demoltiplicatori di impulsi a « scale di due » di funzionamento sicuro, senza ricorrere all'introduzione di tubi elettronici nell'accoppiamento tra gli stadi. Infatti gli impulsi utili uscenti da uno stadio sono spesso insufficienti ad azionare il successivo, perchè le reti usate che debbono convogliarli simmetricamente ai due tubi di uno stesso « flip-flop », presentano sempre un'impedenza d'entrata assai bassa, a causa di un effetto di controreazione. Occorre poi che non agiscano gli impulsi di segno opposto, che ogni stadio produce alternativamente a quelli utili. Inoltre gli elementi del circuito che servono a convogliare gli impulsi di azionamento influiscono contemporaneamente sull'esistenza delle due posizioni stabili, rendendo così laboriosi i calcoli o i tentativi di progetto.

Per evitare questi inconvenienti abbiamo studiato e sperimentato su una « scala di 64 » l'accoppiamento rappresentato nella fig. 1. In esso, come in altri tipi, gli impulsi vengono inviati contemporaneamente alle griglie dei due tubi. Quelli negativi agiscono innalzando il potenziale della griglia del tubo che non conduce, dopo essere stati amplificati e cambiati di segno da quello che conduce. Invece quelli positivi non hanno effetto perchè sono insufficienti a portare sopra l'interdizione la griglia del tubo che non conduce, dato che il complesso griglia-catodo dell'altro tubo si comporta come un diodo.

La rete presentata si differenzia dalle consimili per l'introduzione dei due condensatori C , che consentono di separare il problema della transizione da quello del regime di corrente continua. Questo rende molto più semplice il

(*) Studio svolto presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Torino.

calcolo di progetto e inoltre permette di ridurre notevolmente le resistenze R , anche al disotto di R_1 e R_2 , senza compromettere l'esistenza delle due posizioni stabili. Tale diminuzione di R , come ha dimostrato uno studio teorico della rete e come confermano le esperienze condotte, è vantaggiosissima: nel circuito rappresentato in figura gli impulsi negativi che uno stadio invia al successivo sono più che doppi di quelli necessari, mentre i positivi sono almeno

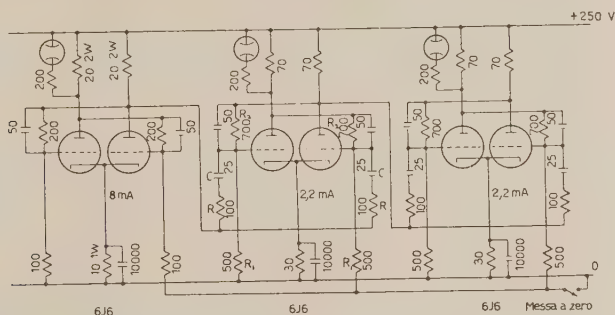


Fig. 1. — Schema dell'accoppiamento tra « scale di due » proposto. Le resistenze sono espresse in $k\Omega$ e le capacità in pF .

dieci volte inferiori a quelli che potrebbero azionare lo stadio. Si è pure constatato che la sicurezza di funzionamento non risulta alterata, anche riducendo più del 50% la tensione anodica.

Per il progetto si consiglia di scegliere i singoli circuiti « flip-flop » con le regole suggerite dalla considerazione dei poteri risolutivi necessari, prescindendo dagli accoppiamenti. Poi si determineranno i valori di R e di C proporzionalmente a quelli riportati nell'esempio, dato che essi (e particolarmente quelli di C) sono tutt'altro che critici e che lo studio teorico è alquanto lungo.

Ci si può accertare rapidamente della sicurezza di funzionamento, introducendo una resistenza in serie tra uno stadio e l'altro e verificando che anche per valori abbastanza elevati di essa non si interrompa il funzionamento. Nel caso della figura si poteva aumentare la resistenza fino a circa 60 $k\Omega$.

SUMMARY

A method of coupling scale-of-two circuits is suggested, which presents considerable advantages for its simplicity of calculation and reliability on operation, compared with the other resistance and capacity coupled circuits.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sulla variazione diurna degli sciame estesi di grande densità a 3500 m s.l.m.

C. BALLARIO, B. BRUNELLI, A. DE MARCO e G. MARTELLI ⁽¹⁾.

Istituto di Fisica dell'Università. Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 19 Giugno 1951)

Durante lo scorso anno sono state eseguite, presso il Laboratorio della Testa Grigia (3500 m s.l.m., latitudine magnetica 47,7° N), esperienze sugli sciame estesi, i risultati delle quali saranno comunicati in futuro. Diamo qui brevemente un resoconto dell'analisi sulla variazione diurna di tali sciame relativa ad alcune serie di misure eseguite tra Giugno ed Agosto dello scorso anno ⁽²⁾.

Il dispositivo sperimentale consisteva di tre vassoi *ABC* di contatori di Geiger, posti in un piano orizzontale ai vertici di un triangolo equilatero di sei metri di lato. Ciascun vassoio di contatori aveva una superficie $S = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Altri tre vassoi *DEF* di contatori erano posti uno sopra l'altro in prossimità del centro del triangolo *ABC*; il vassoio *D* era costituito da contatori normali, *E* ed *F* erano costituiti da contatori a basso rendimento (rendimento $r = 3 \cdot 10^{-2}$). L'area di *EDF* era $s = 10^{-2} \text{ m}^2$.

Il tetto del Laboratorio aveva uno spessore di 1,4 g/cm², ed era costituito di materiale leggero; nessuna correzione

è stata portata, nella discussione dei dati sperimentali, per tenere conto della sua presenza.

Venivano registrate contemporaneamente le coincidenze triple tra i vassoi *ABC* (C_S), le coincidenze triple *DEF* (C_s) e le coincidenze sestuple $ABC + DEF + (C_{S+s})$.

Per analizzare i nostri risultati sperimentali, in vista dell'esistenza di una variazione diurna, si sono suddivisi in due gruppi i conteggi ottenuti per le triple C_S , per le C_s e per le sestuple C_{S+s} . Un gruppo è formato dai conteggi relativi agli intervalli di tempo di misura che cadono interamente tra le ore t_0 e $(t_0 + 12)$, (tempo dell'Europa Centrale); l'altro è formato dai conteggi, scelti con lo stesso criterio, relativi all'intervallo compreso tra le ore $(t_0 + 12)$ e $(t_0 + 24)$.

Noi chiamiamo $C_S^{t_0}$, $C_s^{t_0}$ e $C_{S+s}^{t_0}$ i primi, $C_S^{t_0+12}$, $C_s^{t_0+12}$ e $C_{S+s}^{t_0+12}$ i secondi. Infine abbiamo calcolato i rapporti:

$$\frac{C_S^{t_0}}{C_S^{t_0+12}} = R_S(t_0), \quad \frac{C_s^{t_0}}{C_s^{t_0+12}} = R_s(t_0),$$

$$\frac{C_{S+s}^{t_0}}{C_{S+s}^{t_0+12}} = R_{S+s}(t_0).$$

⁽¹⁾ Attualmente presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

⁽²⁾ Lo spunto a questa analisi ci è stato fornito dal prof. E. AMALDI, a seguito di un suo recente colloquio col prof. H. ALFVÉN.

Nella Tabella seguente diamo i risultati dell'esperienza, riportando nella colonna ottava i valori medi pesati della pressione barometrica.

sono principalmente dovute a sciami di densità $\Delta \propto 1/S = 12 \text{ m}^{-2}$;

b) le coincidenze C_s sono dovute principalmente ⁽³⁾ a particelle molto

TABELLA I.

t_0 (ore)	$C_s^{t_0}$ (coinc/min)	$C_s^{t_0+12}$ (coinc/min)	$C_s^{t_0}$ (coinc/min)	$C_s^{t_0+12}$ (coinc/min)	$C_{S+s}^{t_0}, C_{S+s}^{t_0+12}$ (coinc/min)	$R_S(t_0)$	$R_s(t_0)$	$R_{S+s}(t_0)$	H^{t_0}	H^{t_0+12} (mm Hg)
0	3.002 $\pm .029$	3.074 $\pm .031$.0632 $\pm .0047$.0547 $\pm .0042$.0152 $\pm .0021$.0081 $\pm .0016$.976 $\pm .014$	1.16 $\pm .12$	1.88 $\pm .46$	508	507
2	3.015 $\pm .029$	3.006 $\pm .027$.0620 $\pm .0041$.0750 $\pm .0058$.0152 $\pm .0020$.0087 $\pm .0020$	1.002 $\pm .016$.83 $\pm .09$	1.75 $\pm .47$	507	508
4	3.102 $\pm .044$	3.025 $\pm .038$.0545 $\pm .0059$.0572 $\pm .0052$.0171 $\pm .0033$.0076 $\pm .0019$	1.025 $\pm .015$.95 $\pm .13$	2.24 $\pm .70$	508	508
6	3.051 $\pm .039$	2.994 $\pm .035$.0543 $\pm .0052$.0577 $\pm .0048$.0152 $\pm .0027$.0089 $\pm .0019$	1.019 $\pm .018$.94 $\pm .12$	1.70 $\pm .47$	509	507
8	3.055 $\pm .038$	3.004 $\pm .027$.0569 $\pm .0051$.0610 $\pm .0039$.0139 $\pm .0025$.0105 $\pm .0016$	1.016 $\pm .015$.93 $\pm .10$	1.32 $\pm .31$	509	507
10	3.113 $\pm .026$	2.999 $\pm .032$.0542 $\pm .0050$.0609 $\pm .0056$.0099 $\pm .0021$.0122 $\pm .0018$	1.038 $\pm .014$.89 $\pm .13$.81 $\pm .21$	508	507

Dall'esame della Tabella si osserva che, mentre $R_S(t_0)$ e $R_s(t_0)$ si mantengono, entro gli errori, costantemente assai prossimi ad 1, $R_{S+s}(t_0)$ è superiore ad 1 per t_0 che varia dalle ore 0 alle ore 8, e scende a valori minori di 1 per t_0 maggiore di 8.

Questa variazione piuttosto notevole di R_{S+s} con t_0 , è resa molto incerta dalla bassa precisione delle misure; comunque, supposto che essa abbia significato, possiamo escludere che si tratti di un effetto strumentale (casuali, induzioni, ecc.) o di un effetto barometrico. Inoltre, una grossolana valutazione indica che eventualmente un effetto dovuto ad una variazione diurna della temperatura dell'atmosfera produrrebbe una variazione di R_{S+s} in senso contrario a quello osservato.

Allo scopo di interpretare i dati sperimentali abbiamo osservato che:

a) le coincidenze C_S , come è noto,

ionizzanti, a particelle localmente associate e, in minor misura, a sciami estesi di densità molto maggiore di 12 m^{-2} ⁽⁴⁾;

c) le coincidenze C_{S+s} sono dovute ad eventi simultanei del tipo a) e b), e prevalentemente a sciami di alta densità ⁽³⁾, come si può vedere osservando il comportamento della funzione

$$(1) \quad F(\Delta) = K \int_0^{\Delta} (1 - \exp[-s\Delta])^3 \times \\ \times (1 + \exp[-s(2r - r^2)\Delta]) \Delta^{-(\gamma+1)} d\Delta,$$

la quale fornisce il numero di coincidenze C_{S+s} dovute a sciami di densità

⁽³⁾ La conferma sperimentale è fornita dalle osservazioni eseguite con una camera di Wilson posta, per effettuare altre misure, sotto i vasi DEF.

⁽⁴⁾ A. DE MARCO, G. MARTELLI, F. SALVETTI: in corso di pubblicazione.

minore di A_1 , e che è scritta, sotto le usuali ipotesi, per il nostro dispositivo.

Per spiegare il comportamento di R_{S+s} , abbiamo poi fatto l'ipotesi che gli sciami di densità maggiore di un certo valore A_1 , abbiano intensità nulla, durante 12 ore, dalle 16 alle 4 susseguenti. Durante questo intervallo di tempo, infatti, il rapporto R_{S+s} è minore di uno. Sotto questa ipotesi possiamo scrivere

$$\frac{F(\infty)}{F(A_1)} = 2,2,$$

da cui, tramite la (1), si ottiene $A_1 \approx 500 \text{ m}^{-2}$.

Un simile taglio sullo spettro di densità durante 12 ore è perfettamente compatibile con i valori trovati per R_S , in quanto i vassoi *ABC* registravano, come si è detto, in prevalenza sciami di densità minori di A_1 . La compatibilità tra dette ipotesi e il valore sperimentale di R_S sussiste, per quanto si è detto in b).

Il valore dell'energia dei primari responsabili di sciami di densità media di circa 500 m^{-2} è, secondo le usuali ipotesi, dell'ordine di 10^{16} eV . Crediamo lecito pensare che l'effetto diurno osservato per gli sciami si debba riferire ad un corrispondente taglio per i primari di energia maggiore di 10^{16} eV . È evidente che con ipotesi diverse dalle usuali, circa la formazione di uno sciame esteso, si può giungere ad una diversa valutazione della energia della radiazione primaria incidente sulla atmosfera.

I risultati di altre esperienze ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾, condotte al Laboratorio della Testa Grigia, analizzati con gli stessi nostri criteri, danno indicazioni indipendenti, circa la esistenza di una variazione diurna degli sciami estesi.

⁽⁵⁾ E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, 7, 401 (1950).

⁽⁶⁾ G. MARTELLI e G. STOPPINI: di prossima pubblicazione.

Short μ -Meson Tracks from π -Meson Decays (*).

W. F. FRY

Department of Physics, Iowa State College - Ames, Iowa

(ricevuto il 19 Giugno 1951)

A study has been made of a series of Ilford C-2 200 micron plates which has been exposed in a spiral orbit spectrometer ⁽¹⁾ to the 184 inch Berkley cyclotron. The plates were exposed in such a manner that positive π -meson entered the emulsion from one direction while negative π -mesons entered from the opposite direction.

Along with 1244 normal π - μ decays where the π and μ -meson tracks stopped in the emulsion, seven π - μ decays were found where the μ tracks are unusually short. The ranges of the μ -meson tracks and the angles between the directions of the π and μ -mesons are given in Table I.

TABLE I.

Event	Range of μ tracks in microns	Angle between directions of π and μ tracks
1	500	76
2	490	90
3	485	65
4	260	113
5	258	93
6	120	73
7	25	48

(*) Supported in part by a grant from the Research Corporation.

⁽¹⁾ R. SAGANE: *Phys. Rev.*, **81**, 653 (1951).

The average length of the μ -meson tracks from π -meson decays is about 590 microns in these plates. The grain density along all seven of the decay tracks is the same as along equivalent residual lengths of μ -meson tracks from normal π - μ decays. The data indicate that the μ -mesons were ejected with a lower energy than in a normal π - μ decay.

All seven π -mesons entered the emulsion from such a direction as to indicate that they were positively charged. About 1500 π -meson events of both signs have been observed along with the seven unusual π - μ decays. Only one case was found where the sign of the charge on the π -meson is inconsistent with the phenomena associated with the meson; hence the backscattering is small. No conclusive evidence has been found for the decay of a negative π -meson in photographic emulsions. The number of negative π -mesons which decay in photographic emulsions must then be quite small. Since the backscattering in the spectrometer is small, it is concluded that the seven π -mesons are positively charged.

In events 1, 3, 6 and 7 it is possible to establish, from the directions of the π and μ -mesons and from the grain density along the π -meson tracks, that the decreased energy of the μ -mesons is not due to the decay of the π -mesons in flight. In events 1, 2, 3, 4 and 5 it can be definitely established from the grain den-

sity and scattering along the π and μ -meson tracks, that these events are π - μ decays and not scattered μ -mesons. In event 7 the μ -meson is quite short. However by comparison with a π - μ decay within 25 microns of this event, it seems certain that the event is a π - μ decay. The π -meson track in event 6 makes an angle with the plane of the emulsion of 60° , therefore it is not possible to establish with certainty from the grain density that the event is not a scattered μ -meson. However the small angle scattering along the tracks indicates that the event is a π - μ decay.

It may be possible that events 1, 2 and 3 are examples of straggling and are normal π - μ decays. If events 4 and 5 are due to the decay of the π -mesons in flight, the π -mesons must have had energies of 0.76 MeV and 1.7 MeV, respectively, at the time they decayed. If the short μ -mesons in events 4 and 5 are due to an excited state of the μ -me-

sons, the excitation energy is then 8 MeV. A possible explanation of the short μ -meson tracks is that the π -meson decays into a μ -meson and three neutrinos.

An unusual π - μ decay was found by POWELL⁽²⁾. However the μ -meson did not stop in the emulsion but by grain counting and scattering he concluded that the μ -meson track would have been less than 350 microns long. Another π - μ decay was found by BARKAS⁽³⁾ where the μ -meson track is 275 microns long.

The author is indebted to Dr. R. SAGANE for the exposed plates and to Dr. J. K. KNIPP for many helpful and stimulating discussions.

(2) C. F. POWELL: *Cosmic Radiation* (Colston Papers, 1948).

(3) W. H. BARKAS: *Verbal statement Washington Meeting American Physical Soc.* (1951).

On the Quantum Theory of Fields (I).

G. WATAGHIN

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 3 Luglio 1951)

The present remarks concern a theory based on the assumption of the existence of a fundamental limitation of our possibilities to measure space and time intervals $x'_\mu - x''_\mu = 2\eta_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), where x'_μ and x''_μ refer to two particles if in the centre of mass system (*C*-system) the conditions:

$$(1) \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 \lesssim l^2, \quad |\eta_0| \lesssim l,$$

are satisfied. We assume that the interaction takes place in the domains D defined by (1), where l is a universal length.

Obviously the existence of small domains, where the intervals, satisfying the condition (1) are not measurable, implies a limitation of applicability of the Lorentz transformation to such domains.

Experimental data on high energy collisions observed in cosmic ray phenomena suggest to consider the processes of creation of new particles (and also annihilation- and decay-processes) as fundamental events giving rise to the above mentioned limitations. Specially the multiple production of mesons (charged and neutral) in nucleon-nucleon collisions implies creation of the inertial mass of new particles and thus, in some way, implies the interaction with the *metric field* described by $g^{\mu\nu}$ or by γ^μ . One could introduce, of course, a large number of universal lengths, but the consideration of a statistical equilibrium between all kinds of particles at an extremely high temperature: $kT \sim hc/l$ induces us to assume only one constant related to the limitation of our measurements in space-time. Accordingly, we shall postulate the limitation of applicability of the laws of propagation in space time domains D [specified by conditions (1)]. The results of the interaction are determined by statistical laws specified below.

The purpose of the present note is to discuss a modified form of the quantum theory of fields based on the following assumptions:

1) The laws of propagation in the space-time of fields representing statistically elementary particles are given by a set of homogeneous equations known for free particles (without interaction). Specially for Maxwell equations we use only the transversal waves and assume the strong validity of the Lorentz condition.

2) The interaction operator between two particles depends on the operators of quantized fields $\psi(x')$, $A(x'')$ representing the two colliding particles, and also it will depend on the invariants formed with relative coordinates η_μ and with mo-

menta of incident particles p'_μ ; p''_μ ; and of created, outgoing particles (p'''_μ, \dots). We indicate $p'_\mu + p''_\mu = P_\mu$; $p'_\mu - p''_\mu = p_\mu$. Then the invariants, we shall introduce are: $\eta_\mu \eta^\mu$, $P_\mu P^\mu$, $p_\mu p^\mu$, $P^\mu \eta_\mu$ (P^μ commute with η_μ). Although the theory we are proposing is not a Hamiltonian theory, we shall introduce in the calculation of the S matrix (by Feynman-Dyson method) some kind of Hamiltonian operator containing a «product» of two operators defined as:

$$(2) \quad \int \psi(x)'_\mu D\left(\frac{x' - x''}{2}\right) d^4 x'' A(x'') = \int \psi(\xi_\mu + \eta_\mu) D(\eta_\mu) d^4 \eta A(\xi_\mu - \eta_\mu),$$

where $D(\eta_\mu)$ is an invariant operator; and ξ_μ are the centrum of mass coordinates: $\xi_\mu = (x'_\mu + x''_\mu)/2$. Considering the case

$$\psi(x'_\mu) = b_{p'} \exp[ip'_\mu x'_\mu], \quad A(x'') = a_{p''} \exp[ip''_\mu x''_\mu],$$

one obtains as the «product-operator»:

$$(3) \quad b_{p'} a_{p''} \exp[i(p'_\mu + p''_\mu) \xi_\mu] \int \exp[i(p'_\mu - p''_\mu) \eta'_\mu] D(\eta) d^4 \eta = \\ = b_{p'} a_{p''} \exp[i(p'_\mu + p''_\mu) \xi_\mu G(p'_\mu - p''_\mu)],$$

where $G(p'_\mu - p''_\mu)$ is an invariant *cut-off factor*, function of $|(p'_\mu - p''_\mu)(p'^\mu - p''^\mu)|$, and of other invariants. Obviously the resulting interaction is not localisable, and represents a type of short range interaction.

The quantum theory of fields we are proposing to study is a S -matrix theory following the program of HEISENBERG and STUEKELBERG. It differs from other formulations in many respects. The transitions in a collision are limited to those compatible with assumed type of interaction and thus with the cut-off factors G or D . Many virtual processes giving rise to so called renormalisations of the charge or of the masses are eliminated. The stationary states and the effects of «external fields», corresponding to long range interactions, are deduced by means of the perturbation theory following the Dirac-Fock-Podolsky «many-time» formalism. The supplementary magnetic moments of the electron or of the nucleon and the Lamb-shift come into the play only during the effective interaction with an electromagnetic field.

Let us consider the interactions between photon-field and electron-positron field and let us calculate, for example, the Compton effect. It is convenient to choose the barycentric system of reference. Considering the two well known transitions corresponding to the two Feynman diagrams and indicating with $p'_\mu x'_\mu$ the coordinates of the electron and with $p''_\mu x''_\mu$ those of the photon, we have (3) as the product of the wave-operators of the incident particles. In order to represent the creation of an electron in the intermediate, virtual state we write:

$$(4) \quad b_{p'''}^* b_{p''} a_{p'} \int \psi(x''') d^4(x''') D(x''' - \xi) \exp[i(p' + p'') \xi] G(p' - p'') = \\ = b_{p'''}^* b_{p''} a_{p'} \exp[i(p' + p'' - p''') \xi] G_1(p''') G(p' - p''),$$

where $x''' - \xi = \eta'''$; $G_1 = \int \exp[-ip''' \eta'''] D(\eta''') d^4 \eta$.

Thus in the momentum space our method introduces the cut-off factors for each creation- and for one of the two destruction-operators. These factors depend on the invariants cited above; e.g. in the C system

$$\frac{p_\mu''' P_\mu}{\sqrt{P_\mu P_\mu}} = \frac{p_0''' P_0}{P_0} = p_0'''.$$

In a similar way the method can be applied to more complicated processes. In the following paper the meson production in a nucleon-nucleon collision will be discussed. This paper will also concern the determination of the cut-off operators G . The asymptotic behaviour of $G_1(p_\mu''' P_\mu)$ for large values of p_μ''' in the C system is already fixed by the conditions (1), if the definitions (2) and (4) are assumed to represent average values over the domain D . One has obviously from the uncertainty principle an asymptotical dependence of the type:

$$\sim \left(\frac{\sin p_0''' \frac{l}{2}}{p_0''' \frac{l}{2}} \right)^4, \quad \text{or} \quad \sim \left(\frac{\sin p_0''' l}{p_0''' l} \right) \frac{\sin(p''' l) - p''' l \cos(p''' l)}{(p''')^3},$$

where $p''' = |\mathbf{p}'''|$, in accord with suggestions made in previous papers.

Note added in proofs. — C. BLOCH kindly pointed out to me that the operator $D(\eta)$ could contain the factor $\delta(\eta_\mu P^\mu)$. Here we limit ourselves to the remark that the condition (1) could be specified as:

$$|\eta_\mu \eta^\mu| \lesssim l; \quad \left| \frac{\eta_\mu P^\mu}{\sqrt{P_\mu P_\mu}} \right| \lesssim l.$$

Misure di ampiezza di segnali nucleari.

G. CHIAROTTI e L. GIULOTTO

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 9 Luglio 1951)

Sono state da noi eseguite alcune misure assolute di ampiezza di segnali nucleari « di assorbimento » in funzione del campo oscillante, con un metodo che descriveremo brevemente. Misure di questo genere presentano un duplice interesse sia per la determinazione degli spin nucleari sia per la determinazione dei tempi di rilassamento.

È stato usato un induttore nucleare simile a quello di BLOCH e coll. ⁽¹⁾, nel quale un dispositivo particolare permetteva di controllare la fase del circuito ricevente. I segnali nucleari venivano confrontati sullo schermo dell'oscillografo con segnali ottenuti modulando opportunamente il trasmettitore. La frequenza di modulazione era scelta opportunamente tra quelle delle componenti predominanti nello sviluppo di Fourier del segnale.

Se k è il coefficiente della modulazione necessaria a ottenere sullo schermo una sinusoide della stessa ampiezza del segnale nucleare, V la tensione di a.f. ai capi della bobina ricevente, Q il suo fattore di merito, la f.e.m. indotta dal segnale è

$$E = \frac{V}{Q} k.$$

k veniva inserito ritenendolo proporzionale alla tensione di bassa frequenza modulatrice e la costante di proporzionalità era determinata modulando il trasmettitore abbastanza da poter eseguire la misura del fattore di modulazione con un voltmetro a valvola inserito ai capi della bobina trasmittente. V veniva misurato ai capi della bobina ricevente con un altro voltmetro a valvola. Poichè V è dell'ordine di qualche centesimo di volt la sensibilità del voltmetro era stata aumentata sostituendone il microamperometro con un galvanometro a sospensione. La stabilità dello zero era migliorata alimentando il voltmetro con uno stabilizzatore di tensione.

Grazie a un particolare arrangemento dell'induttore il campione poteva facilmente essere sostituito da una piccola sonda per la misura del campo oscillante. La sonda era costituita da una piccola spira collegata a un circuito oscillante di basso fattore di merito, e il valore del campo veniva dedotto dalla misura della tensione di risonanza ai capi del condensatore.

Per esaminare le possibilità di impiego di questo metodo per la determinazione degli spin nucleari lo abbiamo applicato al caso dei protoni usando come campione una soluzione acquosa di nitrato ferrico.

⁽¹⁾ F. BLOCH, W. W. HANSEN and M. PACKARD: *Phys. Rev.*, 70, 474. (1946).

Dalla teoria di BLOCH ⁽³⁾ risulta che, indicando con E_{\max} il valore massimo della f.e.m. indotta alla risonanza dalla componente fuori fase della suscettività nucleare, $H_{1\max}$ il valore del campo oscillante per cui si ha tale massimo, e ΔH

funzione di H_1 per un campione di forma cilindrica di $1,33 \text{ cm}^2$ di sezione e di $1,2 \text{ cm}$ di altezza, contenente $1,6 \cdot 10^{20} \text{ Fe}^{+++}$ per cm^3 . Il numero delle spire della bobina ricevente era di 25,5.

L'andamento della curva di fig. 1 è

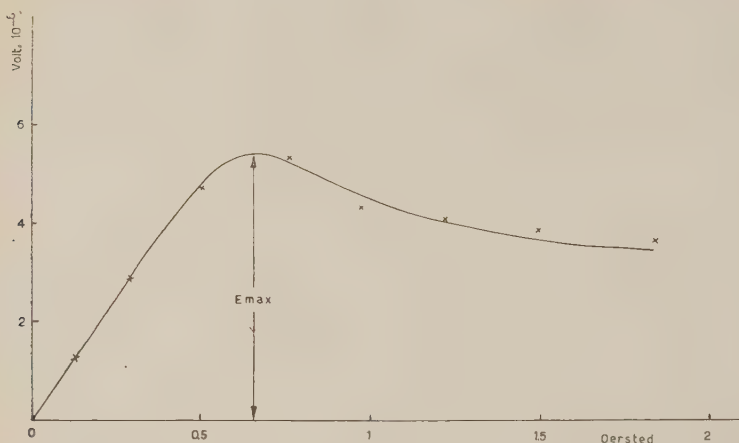


Fig. 1. — f.e.m. indotta relativa ai segnali nucleari « di assorbimento » in funzione del campo oscillante per una soluzione acquosa di nitrato ferrico ($1,6 \cdot 10^{20} \text{ Fe}^{+++} \cdot \text{cm}^3$) alla frequenza di 6,98 MHz.

la semilarghezza della relativa curva di assorbimento,

$$(1) \quad I(I + 1) = 10^8 \frac{3k}{2\sqrt{2\pi h^2 \gamma}} \times \\ \times \frac{T}{SNnf^2} \frac{E_{\max} \Delta H}{H_{1\max}},$$

dove f è la frequenza di risonanza, S la sezione del campione, N il numero delle spire della bobina ricevente e n il numero di nuclei del campione. Si vede dalla (1) che il momento meccanico dipende dall'area della curva di assorbimento e che quindi una sua misura non viene molto influenzata da inomogeneità del campo magnetico costante.

In fig. 1 è riportato il valore di E in

in buon accordo con la teoria di Bloch, che prevede per la componente fuori fase della suscettività nucleare alla risonanza un valore proporzionale a $H_1 T_2 / (1 + \gamma^2 H^2 T_1 T_2)$.

Sostituendo nella (1) i valori sperimentali di E_{\max} , $H_{1\max}$ e degli altri dati ovviamente determinabili, si ottiene per I il valore 0,54. L'accordo fra questo valore e $1/2$ è anche superiore a quello che ci si poteva attendere data la complessità delle misure. La precisione potrebbe essere però notevolmente aumentata con misure di confronto qualora si volesse determinare uno spin incognito. Il metodo in questo caso si ridurrebbe sostanzialmente a quello usato recentemente da F. ALDER e F. C. YU ⁽³⁾ per

⁽²⁾ F. BLOCH: *Phys. Rev.*, **70**, 460 (1946).

⁽³⁾ F. ALDER e F. C. YU: *Phys. Rev.*, **81**, 1067 (1951).

determinare lo spin dell' O^{17} e del quale siamo venuti a conoscenza solo ora.

Riguardo alla determinazione dei tempi di rilassamento longitudinale e trasversale T_1 e T_2 , dalla teoria di Bloch si ha:

$$\sqrt{T_1 T_2} = \frac{2}{\gamma H_{\text{imax}}},$$

$$\sqrt{T_2/T_1} = 10^8 \frac{3k}{2\pi I(I+1)\gamma h^2} \frac{T}{SNnf^2} E_{\text{max}}.$$

Per esempio, dai dati di fig. 1 si ricava per una concentrazione di $1,6 \cdot 10^{20}$ Fe $^{+++}$ $\cdot \text{cm}^3$

$$T_1 = 2,2 \cdot 10^{-4};$$

$$T_2 = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Sul legame tra la cattura K e l'emissione γ del Potassio 40.

M. PAGANELLI e G. QUARENTI

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio degli ioni veloci del C.N.R. - Padova

(ricevuto il 12 Luglio 1951)

Recenti esperienze hanno fornito prove convincenti dell'esistenza del processo di trasformazione del Potassio 40



Tanto le determinazioni della percentuale di A^{40} nei minerali antichi di Potassio ⁽¹⁾ ⁽²⁾ ⁽³⁾, quanto le esperienze dirette basate sulla rivelazione dei raggi X ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ o degli elettroni Auger conseguenti la cattura K ⁽⁵⁾, hanno portato concordemente a concludere che il valore del rapporto tra le costanti di disintegrazione λ_K e λ_- è dell'ordine di 0,1, vale a dire dello stesso ordine del rapporto λ_γ/λ_- ⁽⁴⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾ ⁽¹²⁾.

Considerato che:

1) le misure più precise dell'energia dei quanti γ e del limite superiore dello spettro β portano rispettivamente ai valori $E_\gamma = 1,46 \pm 0,01$ e $E_\beta = 1,36 \pm 0,03$, vale a dire $E_\gamma > E_\beta$ ⁽¹²⁾ ⁽¹³⁾ ⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁶⁾ ⁽¹⁷⁾ ⁽¹⁸⁾;

2) è ancora dubbio se il K^{40} emetta o meno positoni ⁽¹⁵⁾ ⁽¹⁹⁾ ⁽²⁰⁾;

3) le misure dirette a rivelare l'eventuale associazione dei raggi β coi raggi γ hanno avuto esito negativo ⁽²¹⁾ ⁽⁴⁾; lo schema di disintegrazione che appare più plausibile è il seguente (fig. 1).

Mancava però una prova diretta della associazione fra i processi di cattura K ed emissione γ . Questa prova ci siamo proposti di ottenere coll'esperienza che qui si descrive. Il dispositivo è illustrato in fig. 2.

⁽¹⁾ L. I. ALDRICH e A. O. NIER: *Phys. Rev.*, **74**, 876 (1948).

⁽²⁾ L. B. BORST e J. J. FLOYD: *Phys. Rev.*, **74**, 989 (1948).

⁽³⁾ M. PAHL, J. HIBY, F. SMITS, W. GENTNER: *Zeits. Naturforsch.*, **5a**, 404 (1951).

⁽⁴⁾ O. HAXEL, J. HEINTZE e F. G. HOUTERMANS: *Zeits. f. Phys.*, **128**, 657 (1950).

⁽⁵⁾ M. CECCARELLI, G. QUARENTI e A. ROSTAGNI: *Phys. Rev.*, **80**, 909 (1950); *Nuovo Cimento*, **8**, 132 (1951).

⁽⁶⁾ G. A. SAWYER e M. L. WIEDENBECK: *Phys. Rev.*, **79**, 490 (1950).

⁽⁷⁾ SPIERS: *Nature*, **165**, 356 (1950).

⁽⁸⁾ AHRENS e EVANS: *Phys. Rev.*, **74**, 279 (1948).

⁽⁹⁾ J. J. FLOYD e L. B. BORST: *Phys. Rev.*, **75**, 1106 (1949).

⁽¹⁰⁾ G. A. SAWYER e M. L. WIEDENBECK: *Phys. Rev.*, **76**, 1535 (1949).

⁽¹¹⁾ W. R. FAUST: *Phys. Rev.*, **78**, 626 (1950).

⁽¹²⁾ P. R. BELL, B. WEAVER e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **77**, 399 (1950).

⁽¹³⁾ D. E. ALBURGER: *Phys. Rev.*, **78**, 629 (1950).

⁽¹⁴⁾ M. CECCARELLI, M. MERLIN e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **6**, 151 (1949).

⁽¹⁵⁾ P. R. BELL e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **79**, 173 (1950).

⁽¹⁶⁾ P. R. BELL e J. M. CASSIDY: *Phys. Rev.*, **77**, 409 (1950).

⁽¹⁷⁾ R. W. PRINGLE, S. STANDIL e K. I. ROULSTON: *Phys. Rev.*, **77**, 841 (1950).

⁽¹⁸⁾ M. L. GOOD: *Phys. Rev.*, **81**, 891 (1951).

⁽¹⁹⁾ M. L. GOOD: *Phys. Rev.*, **81**, 1058 (1951).
⁽²⁰⁾ S. A. COLGATE: *Phys. Rev.*, **81**, 1063 (1951).

⁽²¹⁾ H. A. MEYER, G. SCHWACHHEIM e M. D. SOUZA SANTOS: *An. Ac. Bras.*, **19**, 189 (1947).

A e B sono due gruppi di 12 contatori ciascuno collegati rispettivamente

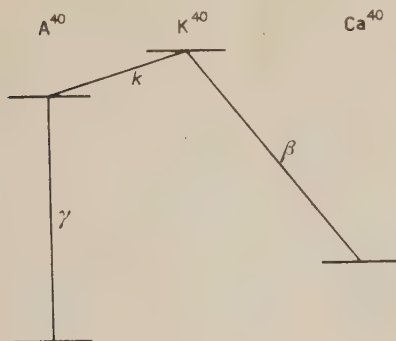


Fig. 1.

in parallelo (dimensioni dei contatori 4×70 cm²). X e Y sono alloggiamenti dove vengono posti contatori (di dimen-

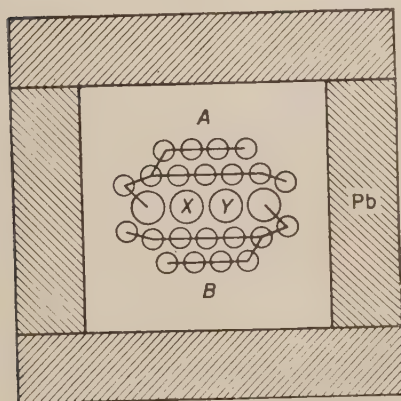


Fig. 2.

sioni 5×50 cm²) con strati diversi di KCl depositato internamente sulla parete cilindrica. Le pareti dei contatori sono di ottone dello spessore di 1 mm. sufficienti ad assorbire sicuramente elettroni di 1,5 MeV di energia. Il circuito di registrazione conta le coincidenze triple $A-X-B$ e $A-Y-B$ e le coincidenze doppie

$AB-X$ e $AB-Y$ (in questo caso i gruppi A e B funzionano in parallelo).

La misura è stata eseguita in caverna, sotto uno spessore di roccia dolomitica di circa 150 m. Da tutti i lati il dispositivo è protetto contro la radioattività ambiente da uno spessore di 10 cm di Piombo. Le coincidenze triple sono causate dai raggi cosmici. Anche in assenza di Potassio vi è un fondo apprezzabile di coincidenze doppie senza la corrispondente tripla; esse sono dovute per la maggior parte alla radiazione γ residua dell'ambiente (²²), come abbiamo potuto verificare, sia togliendo il Piombo, sia avvicinando al dispositivo un preparato di Radio.

I contatori posti negli alloggiamenti X e Y sono provvisti dei seguenti strati di KCl:

a)	0	g/cm ²
b)	$60 \cdot 10^{-6}$	»
c)	$600 \cdot 10^{-6}$	»

Gli spessori indicati rappresentano valori medi; l'osservazione microscopica ci ha rivelato che, oltre ad avere struttura cristallina, gli strati (ottenuti per spruzzamento di soluzioni) non ricoprono per intero la superficie metallica sulla quale sono depositati: lo strato a) non ne ricopre che $1/10$ circa, lo strato b) $1/3$.

Nelle tre condizioni considerate, abbiamo ottenuto i seguenti numeri di coincidenze doppie non anticoincise dalle corrispondenti triple:

a)	$5,78 \pm 0,11$	coinc./ora
b)	$6,30 \pm 0,11$	»
c)	$6,98 \pm 0,20$	»

I numeri sono corretti dalle coincidenze casuali.

Il contributo netto alle coincidenze doppie apportato dal KCl è dunque rispettivamente:

caso b)	$0,52 \pm 0,16$
caso c)	$1,20 \pm 0,23$

(²²) M. MIESOWICZ, L. JURKIEWICZ e J. M. MASSALSKI: *Phys. Rev.*, **77**, 380 (1950).

Dal confronto dei due casi risulta che l'effetto aumenta grosso modo proporzionalmente all'area dello strato e non alla massa di esso. Ciò si spiega se si ammette che le coincidenze abbiano luogo fra particelle di piccolissimo « range » (inferiori allo spessore degli strati impiegati) che interessano i contatori centrali, e radiazioni più penetranti che raggiungono i contatori circostanti: precisamente fra gli elettroni Auger di 3000 eV conseguenti alla cattura K (il cui range nel KCl si aggira sui $60 \cdot 10^{-6}$ g/cm²) e i raggi γ emessi in corrispondenza. La frequenza delle coincidenze osservate si accorda con questa ipotesi e coi valori

ammessi per λ_γ ; entro la precisione delle misure.

Riteniamo dunque di avere raggiunta la prova diretta del legame supposto fra la cattura K e l'emissione γ . Ulteriori esperienze sono in corso.

Ringraziamo il prof. A. ROSTAGNI per averci suggerita questa ricerca ed il dott. M. CECCARELLI per la collaborazione nella prima parte di essa. Ringraziamo inoltre la S.A.D.E. che gentilmente ci ha ospitati presso la Centrale idroelettrica in caverna di Stanga-Mas (Belluno) e la Soc. Montevercchio che ci ha messo a disposizione il piombo necessario alle misure.

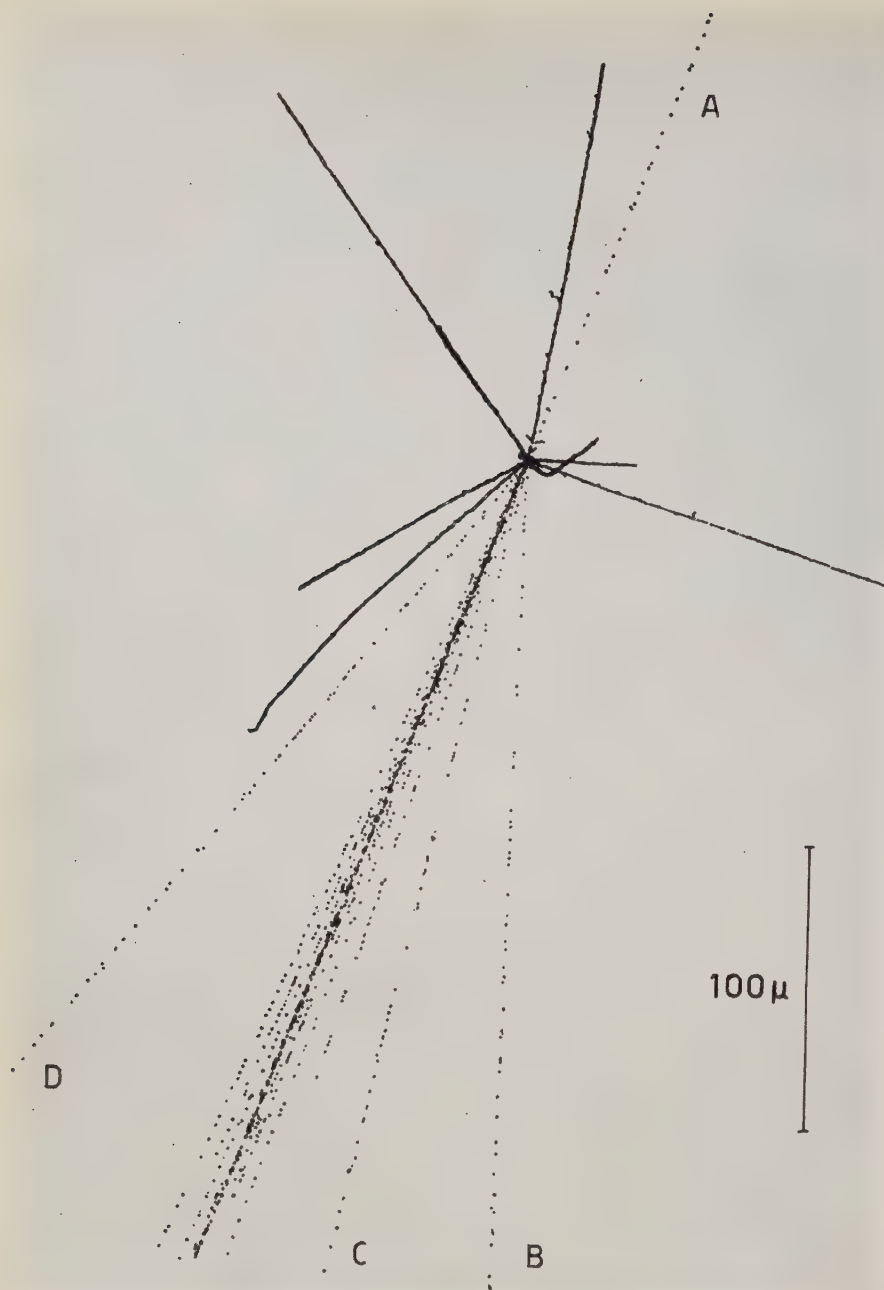


Fig. 1. — Star observed in a plate exposed at an altitude of 4 550 m
(microprojection drawing).

High Energy Event in Nuclear Emulsions at 4550 m.

A. GEROSA and R. LEVI SETTI

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 13 Luglio 1951)

During the scanning of plates exposed at the Monte Rosa (4550 m) ⁽¹⁾, a star was observed in the emulsion, similar in some features to the events described by LORD *et al.* ⁽²⁾ and by KAPLON *et al.* ⁽³⁾.

The star is shown in the micro-projection drawing of fig. 1.

The interaction occurred most probably between a proton (track A) and an heavy nucleus of the emulsion, owing to the number of highly ionising particles observed.

A collimated shower of relativistic particles is directly opposite to the incident track, three minimum ionisation particles (tracks B, C, D) are ejected in a wider cone. In the collimated beam are present 7 minimum ionisation tracks grouped together in a narrow cone of 0,004 rad width, assuming the aspect of a single, heavy track, near the center of the star; 8 other relativistic particles lie around the central core in a cone of about 0,1 rad width.

On account of the high energy involved in the single tracks, their length is insufficient to determine their mo-

mentum by multiple scattering measurements. If however the two cones of particles are considered to be the result of a single nucleon-nucleon collision within the nucleus, an approximate determination of the energy of the incident particles is made possible ⁽²⁾.

Considering the particles in the narrow cone of 0,004 rad in the laboratory system to be predominantly mesons (multiple production) ejected in the forward direction in the center-of-mass system, and the tracks in the cone of 0,1 rad as ejected in the backward direction as above, a satisfactory agreement is obtained on the energy of the incident particles in both cases and of the order of $1 \cdot 10^{13}$ eV.

The three particles in the wider cone may be the result of further collisions within the nucleus.

A more detailed analysis of this event is not possible on account of the length of the tracks, however this star may be considered one of the most energetic interactions observed at our relatively low altitude of exposure (4550 m), the only examples of this type being found in plates exposed at about 30000 m.

We are grateful to prof. P. CALDIROLA and O. SPECCHIA for helpful discussions and to dr. M. MERLIN for kindly lending the plate.

⁽¹⁾ R. LEVI SETTI and M. M. MERLIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 504 (1951).

⁽²⁾ J. J. LORD, J. FAINBERG and M. SCHEIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 774 (1950); *Phys. Rev.*, **80**, 970 (1950).

⁽³⁾ M. F. KAPLON, B. PETERS and H. L. BRADT: *Phys. Rev.*, **76**, 1735 (1949).

INFORMAZIONI

Assegnazioni per il 1950 di premi, borse e sovvenzioni della " Fondazione Angelo Della Riccia ,,.

Per cortese concessione del Consiglio di Amministrazione della « Fondazione Angelo Della Riccia » diamo qui stralcio della « Relazione » del Comitato scientifico della Fondazione stessa relativamente all'assegnazione dei premi, borse e sovvenzioni per l'anno 1950.

« Il giorno 18 Aprile 1951, alle ore 17 si è riunito presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma il Comitato scientifico della Fondazione Della Riccia. Erano presenti il prof. E. AMALDI, il prof. A. CARRELLI, il dott. L. FAZZARI, Consigliere delegato della Fondazione suddetta, il prof. B. FERRETTI, il prof. G. POLVANI, il prof. A. ROSTAGNI, il prof. G. WATAGHIN. Il prof. L. TIERI assente giustificato. Viene eletto Presidente il prof. G. POLVANI; funge da Segretario il prof. E. AMALDI.

.... Dopo ampie discussioni il Comitato unanime delibera le seguenti assegnazioni:

— Premio di L. 300 000 al prof. PIERO CALDIROLA (Istituto di Fisica dell'Università di Milano, Via Saldini, 50).

— Una borsa di studio di L. 300 000 al dott. BRUNELLO RISPOLI (Istituto di Fisica dell'Università di Roma).

— Una sovvenzione di L. 150 000 alla prof. AUGUSTA MANFREDINI (Istituto di Fisica dell'Università di Roma).

— Una sovvenzione di L. 150 000 al dott. ITALO FILOSOFO (Istituto di Fisica dell'Università di Padova).

A norma del bando di concorso una borsa di studio e due sovvenzioni sono riservate a studenti. Il Comitato constata che nessuno studente ha concorso.

Il prof. FERRETTI propone che la borsa di studio di L. 300 000 riservata a studenti venga assegnata al sig. RAFFAELE GATTO, laureando in Fisica e allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa.

Il Comitato accoglie unanimemente tale proposta.

Il Comitato non procede alla assegnazione delle due sovvenzioni destinate a studenti, non essendovi nessun concorrente e non essendo stata fatta nessuna designazione dai membri del Comitato... ».

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA